В. Г. Артюхов, канд. техн. наук, В. Б. Жушма, Т. В. Мовчан,

Л. Д. Писаренко, канд. техн. наук, Ю. В. Путилов

Элементарное введение в мультимасштабный анализ сигналов (версия S.G. Mallat'a)

Одной из наиболее ярких информационных технологий, основанных на вейвлет – преобразовании, является мультимасштабный (multiscale либо multiresolution) анализ (ММА), предложенный Малла (S.G. Mallat) и Мейером (Y.Meyer) в 1986 г. [1-3]. В настоящее время известно его успешное применение в компьютерной медицинской диагностике [4-6]. Преградой на пути к его широкому применению зачастую является аналитическая сложность математического аппарата, который в технических вузах нащей страны, как правило, изучается лишь на избранных специальностях: это функциональный анализ (ФА).

Цель доклада – помочь инженерам – исследователям и инженерам – разработчикам электронных информационных систем преодолеть этот психологический барьер - штудирование основ современного ФА. Единственная возможность сделать это – дать вполне элементарное изложение сути ММА, не прибегая к непосредственному вовлечению в рассуждение особо трудных для восприятия понятий ФА. При этом слушателю достаточно владеть такими понятиями, как ортогональное разложение сигналов, технология вычисления коэффициентов разложения, дискретный сигнал, дискретная свертка, дискретное во времени преобразование Фурье, импульсная и комплексная частотная характеристики дискретного фильтра, обработка дискретных сигналов цифровыми фильтрами.

Аппроксимация (approximation) и деталь (detail) – ключевые понятия версии ММА, которую предложил Малла. Кстати, именно детали содержат ту информацию, которая напрямую используется в компьютерной медицинской диагностике, а также для подавления шума и сжатия медицинских сигналов и изображений.

1. Аппроксимации. Скейлинг-функции

Рассмотрим понятие аппроксимации на примере, применительно к вещественному аналоговому сигналу $x(t)$, который представлен на рис.1.1

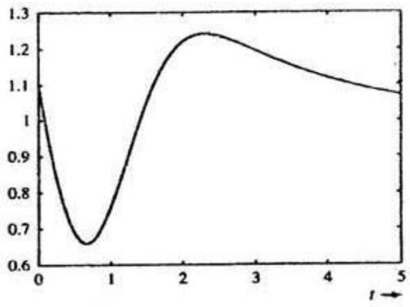


Рис.1.1

Отрезок T_s , на котором задана осциллограмма сигнала, разбивается на N равных сегментов длиной $T_j = 2^j$ с (j - целое вещественное число), и на каждом сегменте $(l_n, l_n + T_j)$ $x(t)$ заменяется (аппроксимируется) константой

$$a_j[n] = \frac{1}{T_j} \int\limits_{l_n}^{l_n+T} x(t)dt, \quad (1.1)$$

где $l_n = n \cdot T_j$ абсцисса начала n-го сегмента. Набор $a_j[n]$ называют коэффициентами аппроксимации. По их значениям синтезируется ступенчатая линия (сплайн нулевого порядка) [7, стр.8]

$$A_j(t) = \sum_{n=1}^{N} a_j[n] har_0\left(\frac{t - nT_j}{T_j}\right), \quad (1.2)$$

где $\mathrm{har}_0(\theta) = \mathrm{har}(0,0) = \begin{cases} 1, \theta \in [0,1) \\ 0, \theta \notin [0,1) \end{cases}$,

θ - величина безразмерная (безразмерное время).

Функцию времени $A_j(t)$ называют аппроксимацией сигнала $x(t)$ на уровне j.

В данном случае $A_j(t)$ является сплайном нулевого порядка, а $\mathrm{har}_0(\theta)$ - элементарной аппроксимирующей функцией (ЭАФ) Хаара, или элементарным сплайном нулевого порядка (рис. 1.2)

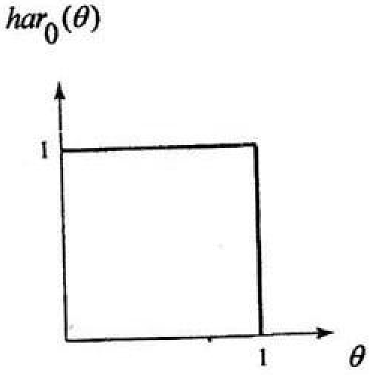
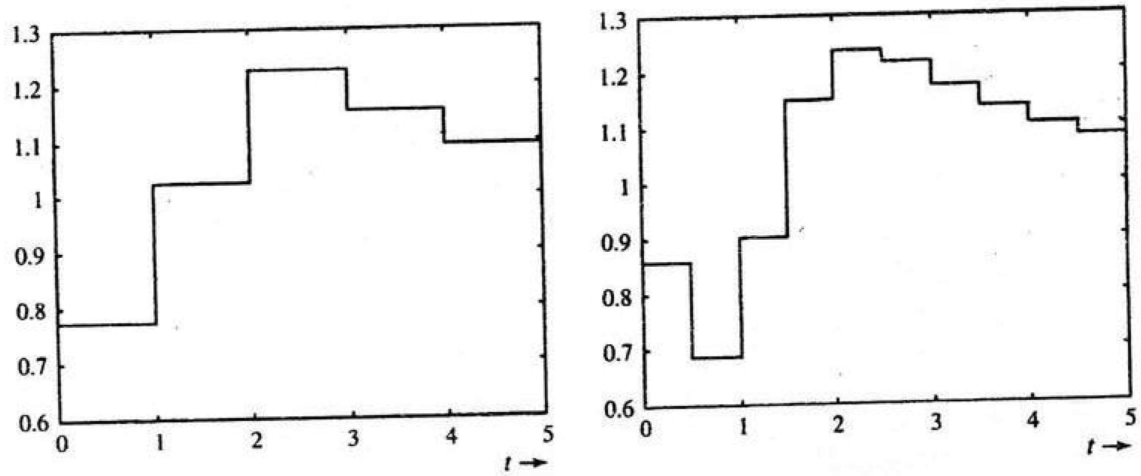


Рис.1.2

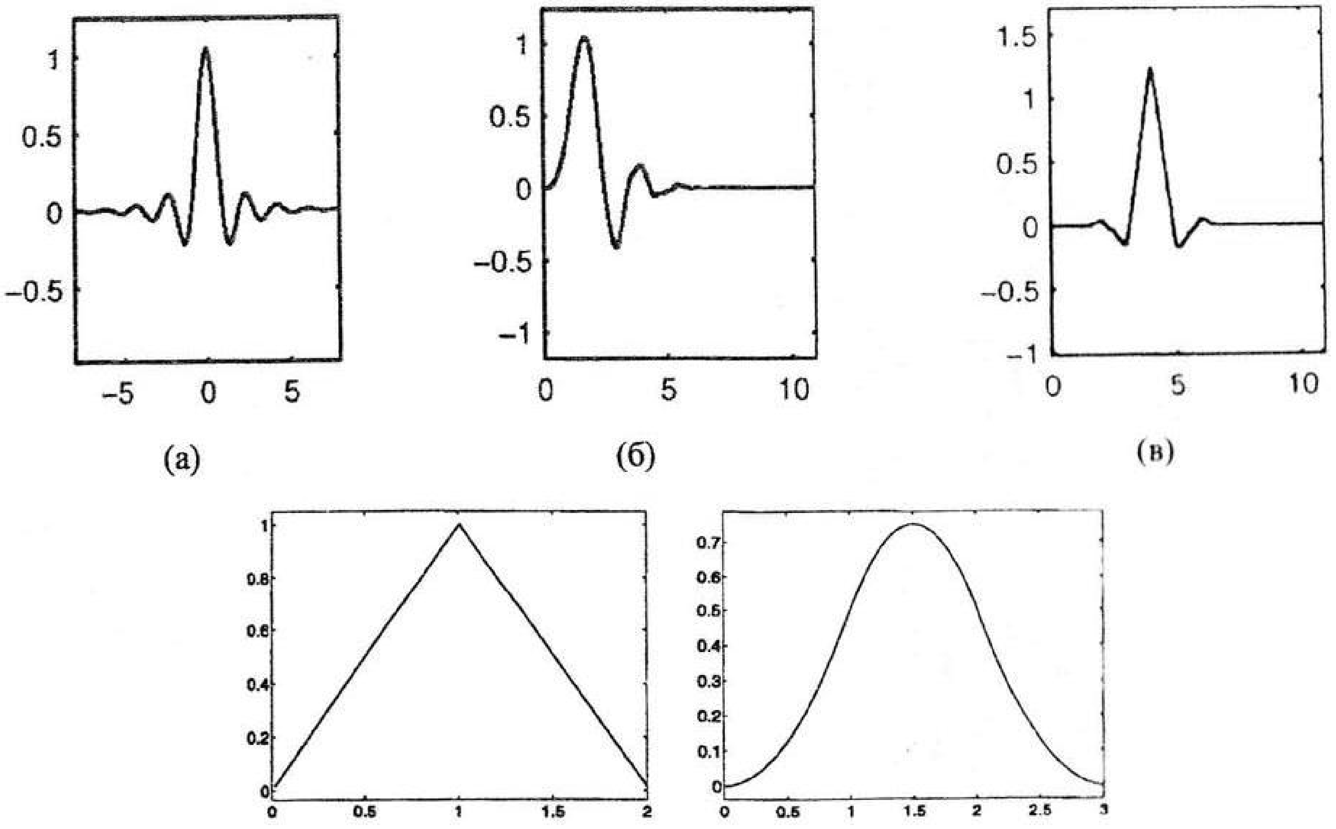
Принципиальное отличие аппроксимаций разного уровня – их масштаб (scale). Именно по этой причине семейство ЭАФ называют масштабирующими (scaling), или скейлинг – функциями. Так, сравнив рис.1.3,а и рис.1.3,б, соответствующие уровням $j=0$ и $j=-1$, вы сразу заметите, что ширина ЭАФ на рис.1.3,б вдвое меньше, чем на рис.1.3,а. Другими словами, чем больше j, тем "грубее" аппроксимация, и наоборот.



(а) (б)

Рис.1.3

ЭАФ Хаара – самая простая из известных скейлинг – функций, наиболее типичными представителями которых являются изображенные ниже скейлинг – функция Мейера (Meyer) (рис.1.4,а), скейлинг-функции из семейств функций Добеши (Daubechies) (рис.1.4,б), Коифмана (Coifman) (рис.1.4,в), Бэтл-Лемарье (Battle – Lemarie) , или B – сплайнов (B - splines)(рис.1.4,г).



(а) (б) (в)

(г)

Рис.1.4

Общее обозначение скейлинг - функций - $\varphi(t)$. Их основные свойства представлены ниже:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = 1 \qquad (1.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, dt = 1 \qquad (1.4)$$

$$\left\langle \varphi(2^{-j}t - n_1), \varphi(2^{-j}t - n_2) \right\rangle = 2^j \delta[n_1 - n_2] \qquad (1.5)$$

Глобальное свойство ЭАФ – она удовлетворяет уравнению растяжения (dilation equation) [8]

$$\varphi(t) = 2\sum_n h[n]\varphi(2t - n), \qquad (1.6)$$

Значения коэффициентов $h[n]$ зависят от конкретной ЭАФ.

Примечание 1. Уравнение (1.6) называют также уравнением разности двух масштабов (two – scale difference equation), уравнением уточнения (refinement equation), или уравнением

ММА (multiresolution analysis equation). Кроме того, иногда вместо коэффициента 2 фигурирует коэффициент $\sqrt{2}$.

Проиллюстрируем соотношение (1.6) применительно к элементарным сплайнам нулевого и первого порядков (рис.1.5).

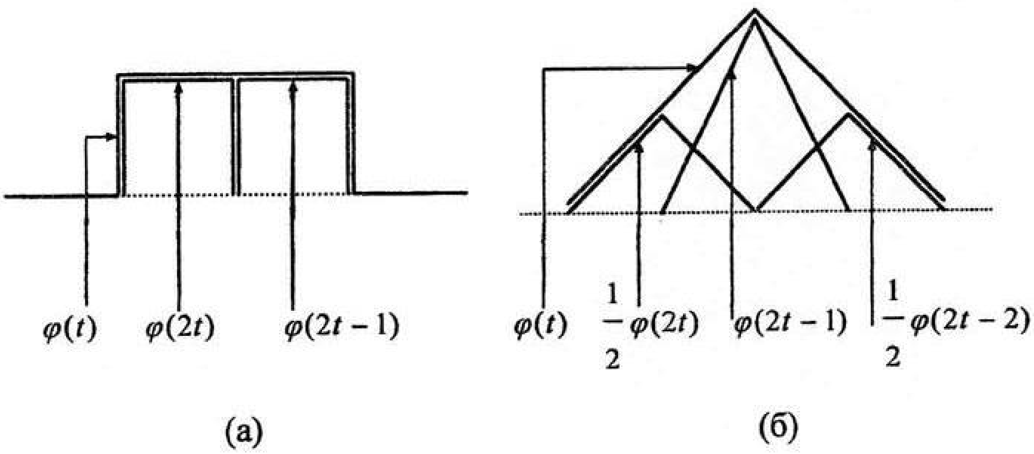


Рис.1.5

В самом деле, для ЭАФ Хаара (рис.1.5,а)

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2(t-0{,}5)) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1)$$

Очевидно, этому соответствуют коэффициенты $h[n],\ n = 0{,}1$, равные $h[0] = h[1] = \frac{1}{2}$.

В случае сплайна первого порядка (рис.1.5,б)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi(2t) + \varphi(2t-1) + \frac{1}{2}\varphi(2t-2)$$

Здесь $h[0] = h[2] = \frac{1}{4},\ h[1] = \frac{1}{2}$.

В общем случае произвольной ЭАФ аппроксимация на j-м уровне определяется соотношением

$$A_j(t) = \sum_n a_j[n]\varphi(2^{-j}t - n), \qquad (1.7)$$

где

$$a_j[n] = 2^{-j} < A_j(t), \varphi(2^{-j}t - n) >= 2^{-j}\int_{-\infty}^{\infty} A_j(t)\varphi(2^{-j}t - n)dt \quad (1.8)$$

Кстати, легко убедится, что в случае скейлинг – функции Хаара правые части выражений (1.1) и (1.8) идентичны.

Отметим, что аппроксимация типа (1.7) примечательна тем, что является оптимальной в смысле критерия минимальной среднеквадратической погрешности :

$$\left\| x(t) - A_j(t) \right\|^2 = \min$$

2. Детали. Вейвлет-функции

Деталью сигнала $x(t)$, адекватному j-му уровню аппроксимации, называется разность пары смежных аппроксимаций

$$D_j(t) = A_{j-1}(t) - A_j(t) \qquad (2.1)$$

Так, деталь $D_0(t)$ сигнала $x(t)$, что на рис.1.1, – это разность осциллограмм, приведенных на рис.1.3,а и рис.1.3,б:

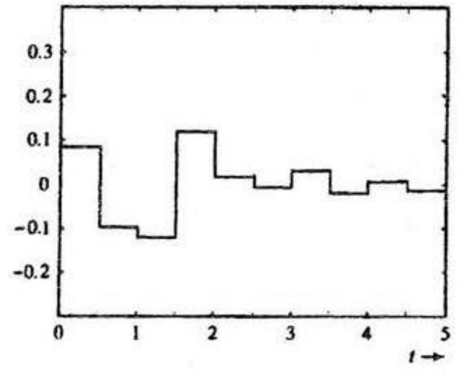


Рис.2.1

Детали, как и аппроксимации, могут быть представлены в виде ортогонального ряда вида

$$D_j(t) = \sum_n d_j[n]\psi(2^{-j}t - n), \qquad (2.2)$$

где $\psi(t)$ - вейвлет-функция, $d_j[n]$ - коэффициенты деталей

$$d_j[n] = 2^{-j} < D_j(t), \psi(2^{-j}t - n) > \qquad (2.3)$$

Из (2.1) следует, что $\psi(t)$ является линейной комбинацией скейлинг-функций. В канонической форме это выглядит так:

$$\psi(t) = 2\sum g[n]\varphi(2t - n), \qquad (2.4)$$

причем можно показать, что

$$g[n] = (-1)^n h[1-n] \qquad (2.5)$$

Таким образом, дело сводится к поиску коэффициентов $h[n]$. Технология этого поиска непроста, она представляет самостоятельный интерес, и мы намерены раскрыть ее в отдельной публикации. Покажем лишь, как это, в принципе, можно сделать. Воспользуемся уравнением растяжения (1.6) и соотношением (1.5) при $j = 0, n' = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\varphi(t-n)\,dt = \delta[n] \qquad (2.6)$$

Легко показать, что интегрируя обе части (1.6) получим

$$\sum_n h[n] = 1 \qquad (2.7)$$

Применяя (1.6) к каждой из скейлинг-функций в выражении (2.6), легко прийти к результату

$$\sum_n h[n]\,h[n-2l] = \frac{1}{2}\delta[l] \qquad (2.8)$$

Пара соотношений (2.7) и (2.8) – условия, накладываемые на последовательность $h[n]$. Пусть $n = 0,1,\ l = 0$. Легко убедиться, что решением системы уравнений

$$h[0] + h[1] = 1$$

$$h^2[0] + h^2[1] = \frac{1}{2}$$

являются коэффициенты $h[0] = h[1] = \dfrac{1}{2}$. Они соответствуют скейлинг-функции Хаара. Из соотношения (2.5) легко получить соответствующие коэффициенты $g[0] = \dfrac{1}{2},\quad g[1] = -\dfrac{1}{2}$ для построения вейвлета Хаара (рис2.2,а). Аналогичным образом можно получить коэффициенты $g[0] = g[2] = -\dfrac{1}{4},\quad g[1] = \dfrac{1}{2}$ для построения вейвлета - сплайна первого порядка (рис.2.2,б).

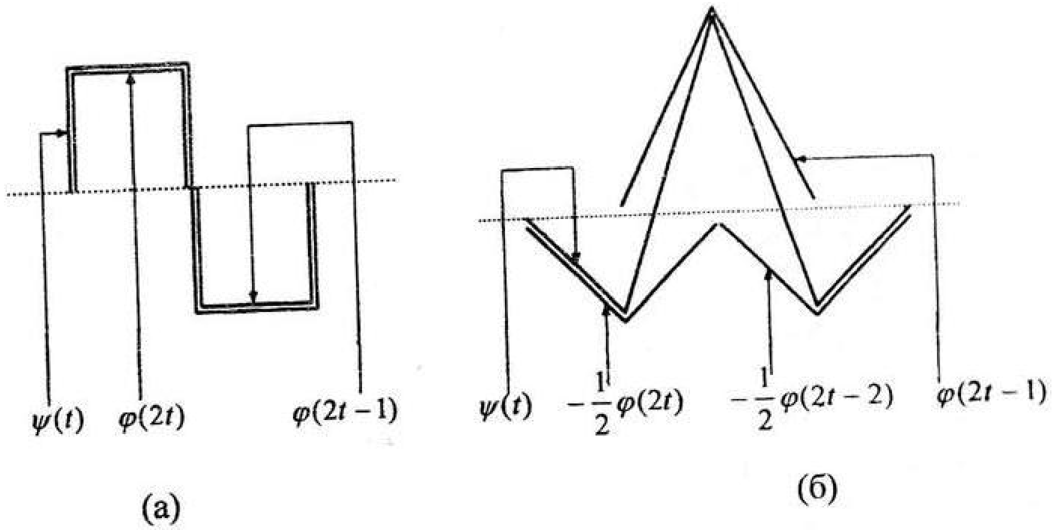


Рис.2.2

Существует неограниченный класс функций, которые являются вейвлетами, и поиск новых вейвлетных функций продолжается. Все вейвлеты должны удовлетворять условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt = 0 \qquad (2.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2\, dt < \infty \qquad (2.10)$$

Ниже представлены наиболее известные из них [9] - вейвлет Морли (Morlet) (рис.2.3,а), мексиканская шляпа (Mexican hat - MHAT) (рис.2.3,б), вейвлет Мейера (Meyer) (рис.2.3,в), вейвлеты из семейств функций Добеши (рис.2.3,г), Коифмана (рис.2.3,д), Бэтл-Лемарье (рис.2.3,е):

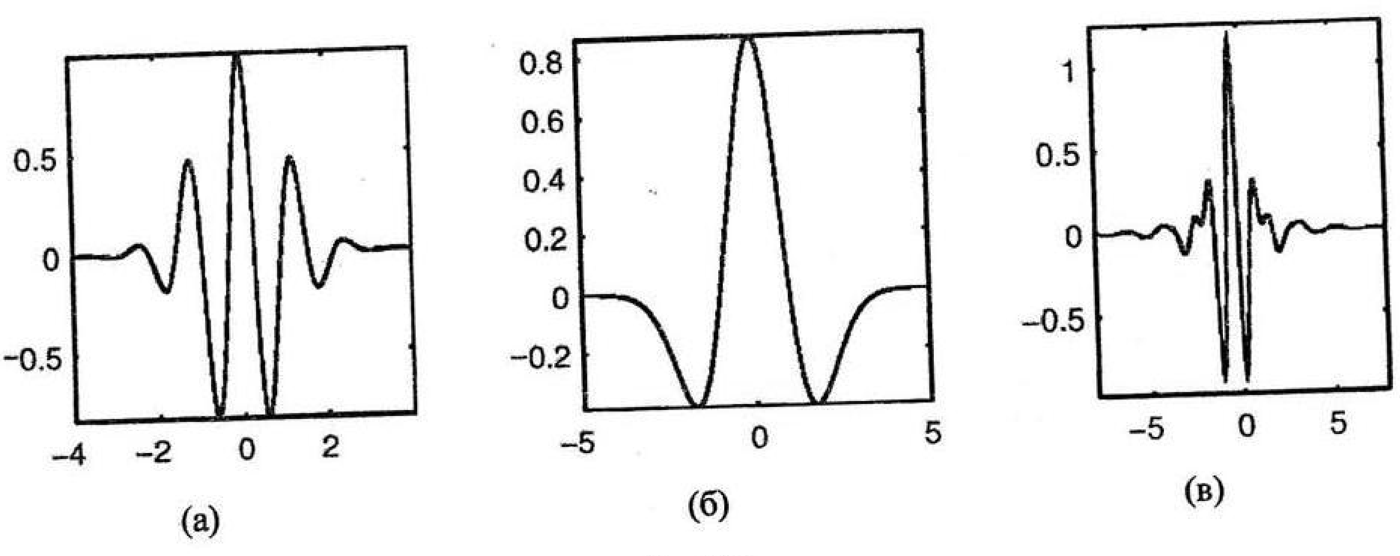
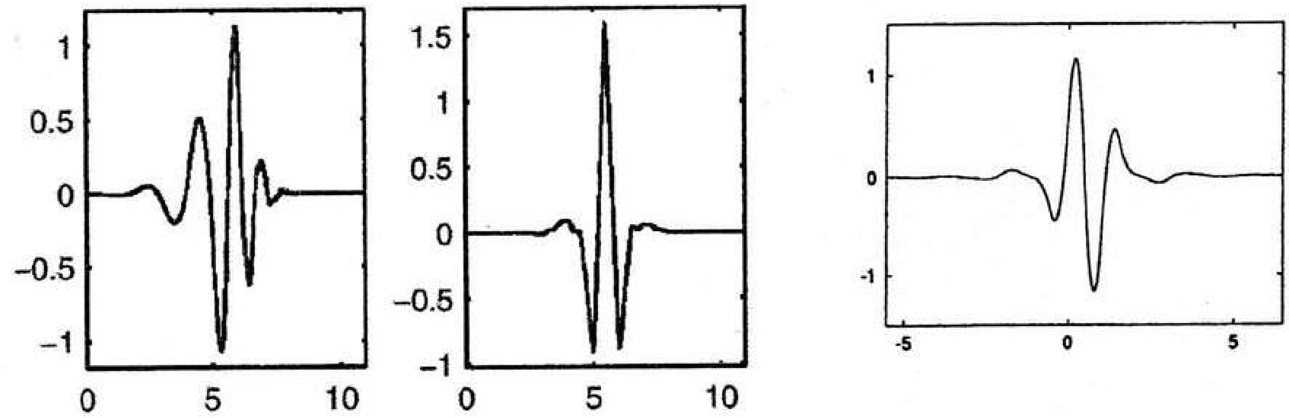


Рис.2.3



(г) (д) (е)

Рис.2.3 (продолжение)

Кстати, вейвлет Морли – комплексный, а на рисунке изображена только его вещественная часть.

Среди представленных функций есть как финитные (compactly supported), так и нефинитные функции. Классическим примером нефинитных вейвлетов является МНАТ-функция – вторая производная от колокольного видеоимпульса (Гауссовой функции), финитных – семейство вейвлетов Добеши, к которым относится также и вейвлет Хаара.

Отметим, что принципиальным отличием вейвлетов, которые могут быть применены в алгоритме Малла, - они должны удовлетворять соотношению (2.4). Иными словами, для них существуют адекватные им скейлинг-функции (подробнее см. об этом в [12]). Кроме того, эти функции должны быть ортогональными (рекомендуем читателю убедится в этом на примере функций Хаара):

$$\left\langle \psi(2^{-j}t-n_1),\psi(2^{-j}t-n_2)\right\rangle = 0 \qquad (2.11)$$

$$\left\langle \psi(2^{-j_1}t-n_1),\varphi(2^{-j_2}t-n_2)\right\rangle = 0, \text{ при } j_1 \geq j_2 \qquad (2.12)$$

3. Пирамидальный алгоритм Малла: аппаратурная реализация ММА

Для синтеза аппроксимаций и деталей – конечной цели ММА – необходимо предварительно вычислить коэффициенты $a_j(n)$ и $d_j(n)$, адекватные анализируемому сигналу $x(t)$. Вывод рекуррентных соотношений для их вычисления приведен в работе Малла [1]. Однако, чтобы понять его выкладки, необходимо свободно владеть основами современного ФА. Между тем, исходные формулы можно получить предельно просто. В самом деле, домножим обе части (2.1) на $\varphi(2^{-j}t-n)$ и воздействуем на результат оператором скалярного произведения. С учетом (2.12) получим

$$\left\langle A_j(t),\varphi(2^{-j}t-n)\right\rangle=\left\langle A_{j-1}(t),\varphi(2^{-j}t-n)\right\rangle,$$

что, с учетом (1.7) и (1.8), адекватно

$$2^j a_j(n)=\sum_m a_{j-1}(m)\left\langle\varphi(2^{-j+1}t-m),\varphi(2^{-j}t-n)\right\rangle \quad (3.1)$$

Представив уравнение растяжения (1.6) в общем виде

$$\varphi(2^{-j}t)=2\sum_{n'}h(n')\varphi(2^{-j+1}t-n') \quad (3.2)$$

можно найти $\varphi(2^{-j}t-n)$:

$$\varphi(2^{-j}t-n)=2\sum_{n'}h(n')\varphi(2^{-j+1}t-2n-n') \quad (3.3)$$

Подстановка (3.3) в (3.1),с учетом (1.5),приводит к соотношению

$$2^j a_j[n]=2\sum_m\sum_{n'}a_{j-1}[m]h[n']2^{j-1}\delta[2n+n'-m] \quad (3.4)$$

или

$$a_j[n]=\sum_m a_{j-1}[m]h[m-2n] \quad (3.5)$$

Расчетная формула для коэффициентов $d_j[n]$ получается аналогично. Различие с предыдущей выкладкой состоит лишь в том, что соотношение (2.1) следует умножить на $\psi(2^{-j}t-n)$. Результат-

$$d_j[n]=\sum_m a_{j-1}[m]g[m-2n] \quad (3.6)$$

Пара соотношений (3.5) и (3.6) формализует пирамидальный алгоритм Малла. Он называется так потому,что его структура напоминает пирамиду (рис.3.1). В данном случае алгоритм выполнен для трех уровней.

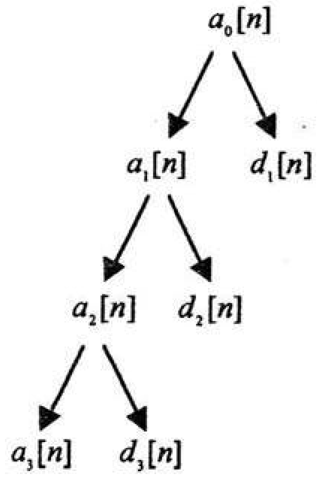


Рис.3.1

Его схематическая реализация становится очевидной, если представить (3.5) и (3.6) в виде

$$a_j[n] = \sum_m a_{j-1}[m]\widetilde{h}[2n-m] \qquad (3.7)$$

$$d_j[n] = \sum_m a_{j-1}[m]\widetilde{g}[2n-m] \qquad (3.8)$$

где

$$\widetilde{h}[m] = h[-m]\,,\ \widetilde{g}[m] = g[-m]$$

Запись $a_j[n]$ и $d_j[n]$ в форме дискретной свертки позволяет трактовать эти последовательности как результат фильтрации последовательности $a_{j-1}[n]$ дискретным (линейным цифровым) фильтром с импульсной характеристикой $\widetilde{h}[m]$ и $\widetilde{g}[m]$, соответственно. Структурная схема вычислителя $a_j[n]$ и $d_j[n]$ - блок фильтров (filter bank) (рис. 3.2), аппаратурно реализующих алгоритм Малла. Обращаем внимание читателя на то, что выражения (3.7) и (3.8) предписывают прореживание отклика фильтра с коэффициентом децимации равным двум

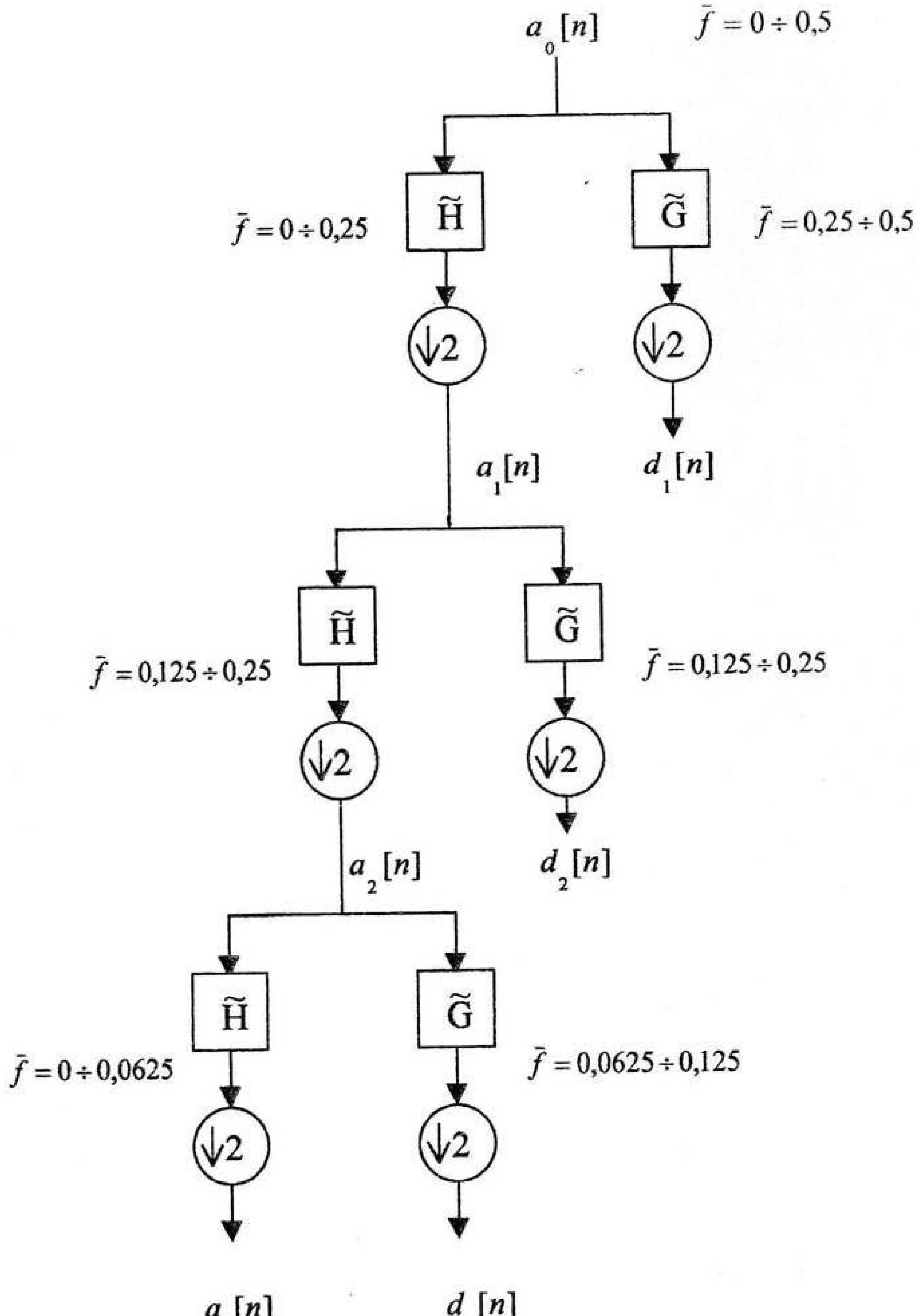


рис.3.2

Здесь $\widetilde{\mathrm{H}}$ и $\widetilde{\mathrm{G}}$ обозначают спектральные характеристики дискретных фильтров:

$$\widetilde{H}(e^{j2\pi\bar{f}}) = \sum_n \widetilde{h}[n] e^{-j2\pi\bar{f}n}, \tag{3.9}$$

$$\widetilde{G}(e^{j2\pi\bar{f}}) = \sum_n \widetilde{g}[n] e^{-j2\pi\bar{f}n}, \tag{3.10}$$

причем справедливо соотношение

$$\left|\widetilde{H}(e^{j2\pi\bar{f}})\right|^2+\left|\widetilde{G}(e^{j2\pi\bar{f}})\right|^2=1 \qquad (3.11)$$

Фильтры, квадраты амплитудно-частотных характеристик которых удовлетворяют этому условию, называются квадратурными зеркальными фильтрами (КЗФ) (quadrature mirror filters, QMF) [1,10] (рис. 3.3). Абсцисса "зеркала" расположена на частоте $\bar{f}=fT=0{,}25$, где T - шаг дискретизации исходного аналогового сигнала по времени.

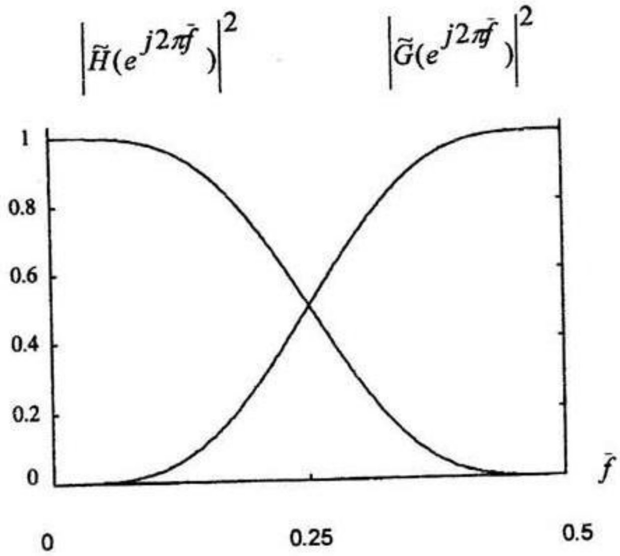
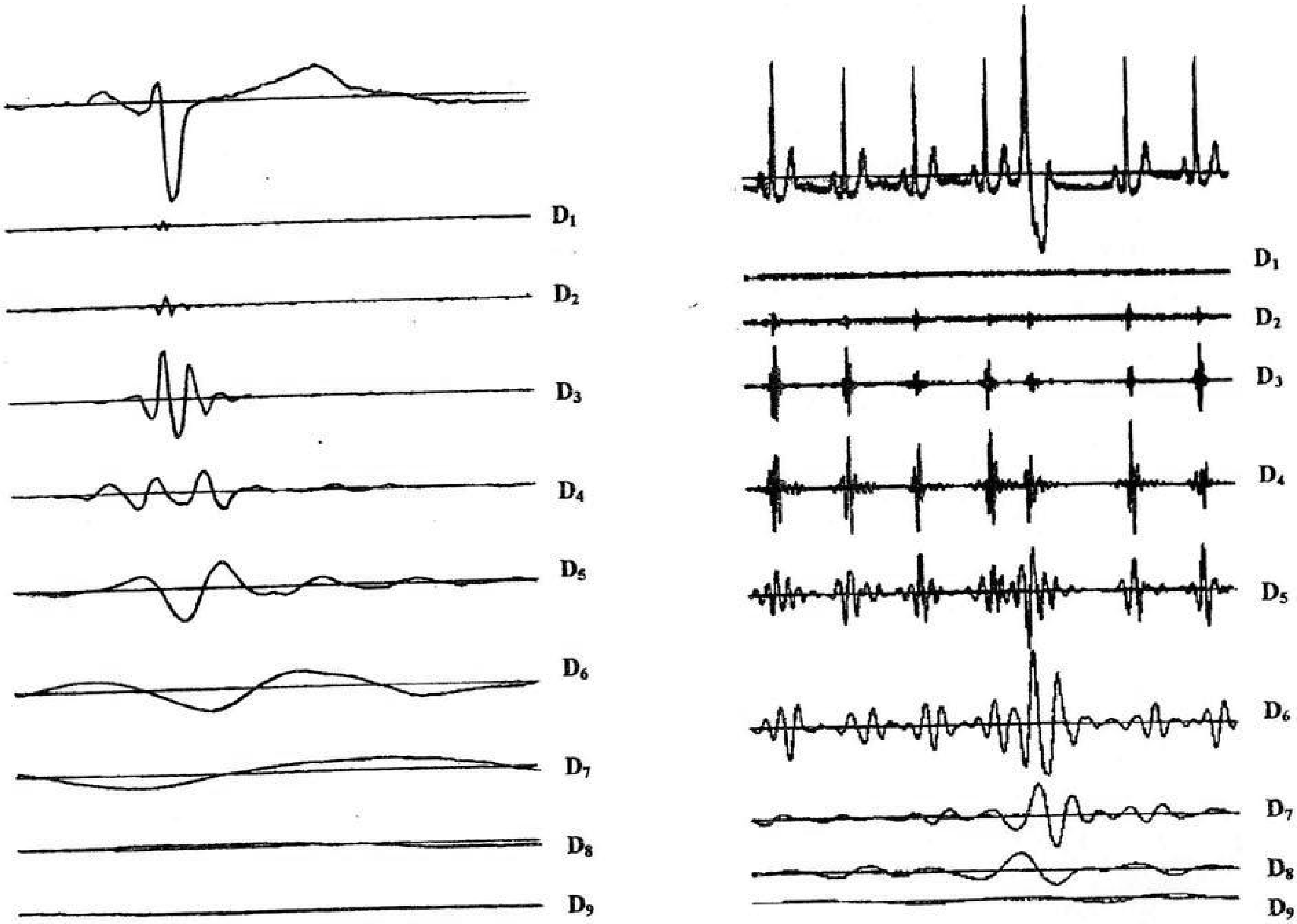


Рис. 3.3

Примечание 2. В зарубежной литературе блок КЗФ иногда называется также логарифмическим или октавно-полосовым (octave-band), а сами КЗФ – полуполосовыми (halfband) либо сопряженными (conjugate) [1,11].

На основании соотношения (2.2) по вычисленным коэффициентам синтезируются аналоговые функции - детали $D_j(t)$. Приведем пару примеров такой обработки реальных биомедицинских сигналов [5]. На рис.3.4,а представлен одиночный удар сердца и его детали D_j $(j=1,2,\ldots,9)$. D_1 и D_2 содержат высокочастотную информацию, D_3 и D_4 локализуют информацию о P-волне и QRS-комплексе; волна T проявляется лишь на высоких уровнях. На рис.3.4,б представлена электрокардиограмма больного и ее детали. Наиболее ценную информацию об аномальных – преждевременных - желудочковых сокращениях (premature ventricular contractions, PVC's), сигнализирующих врачу-диагносту о высокой вероятности ишемической болезни сердца, содержат детали D_6, D_7 и D_8.

Естественно, диагностическая значимость алгоритма, экстрагирующего такую информацию из биосигнала, в комментариях не нуждается.



(а) (б)

Рис. 3.4

Кстати, алгоритм Малла, в принципе, обеспечивает восстановление исходного сигнала по коэффициентам $a_j[n]$ и $d_j[n]$.

Литература

1. S.G.Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol.11, No.7, July 1989, pp.674-693.

2. S.G.Mallat, "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol.315, No.1, Sept. 1989, pp.69-87.

3. S.G.Mallat, "Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models", *IEEE Trans. ASSP*, vol.37, No.12, Dec. 1989, pp.2091-2110.

4. M.Akay, "Wavelet applications in medicine", *IEEE Spectrum*, vol.34, No.5, May 1997, pp.50-56.

5. L.Senhadji, G.Carrault, J.J.Bellanger, G.Passariello, "Comparing wavelet transforms for recognizing cardiac patterns", *IEEE EMB Magazine*, vol.14, No.2, March/April 1995, pp.167-172.

6. Т.Ламброу, А.Линней, Р.Спеллер. Применение вейвлет-преобразования к обработке медицинских сигналов и изображений // Компьютерра, 1998, №8(236), с.50-51.

7. Н.П.Корнейчук. Сплайны в теории приближения.-М.: Наука, 1984.-352 с.

8. G.Strang, "Wavelets and dilation equations: a brief introduction", *SIAM Review*, vol.31, 1989, pp.613-627 .

9. Н.М.Астафьева. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук, 1996, Т.166, №11, с.1145-1170.

10. B.Jawerth, W.Sweldens, "An overview of wavelet based multiresolution analysis", *SIAM Review*, vol.36, 1994.

11. O.Rioul, M.Vetterli, "Wavelets and signal processing", *IEEE SP Magazine*, vol.8, No.4, Oct. 1991, pp.14-38.

12. M.Misiti,Y.Misiti, G.Oppenheim, J.-M.Poggi. Wavelet Toolbox User's Uuide. The MathWorks, Ink., Natick, MA, 1996.