Методы и средства обработки сигналов и изображений

УДК 621.37.624

В.Г. Артюхов, канд.техн.наук, А.А. Оллеик

Шумы квантования дискретного вейвлет-преобразования

В работе приведены результаты исследований шумов квантования дискретного вейвлет-преобразования (ДВП), возникающих при реализации ДВП на процессорах ограниченной разрядности.

This article introduces the limits of using microcontrollers and the effects of quantization and rounding in the arithmetic operations.

Введение

Вейвлет-преобразование находит применение во встраиваемых микрокомпьютерных системах, которые строятся на основе однокристальных микропроцесссорных БИС (микроконтроллеров , процессоров сигналов), отличающихся ограниченной разрядностью. При построении вейвлет- преобразования на их основе возникают шумы, вследствие квантования значений сигнала, коэффициентов преобразования и результатов арифметических операций. Оценка уровня этих шумов представляет интерес при практической реализации ДВП.

1. Оценка шума квантования

Дискретное вейвлет – преобразование (ДВП) сигнала, описываемого произвольной функции $f(t) \in L^2(R)$, может быть представлена в виде [1]:

$$f(t) = \sum_k c_{ik}\phi_{ik}(t) + \sum_j \sum_k d_{jk}\psi_{jk}(t), \qquad (1)$$

где $\phi_{ik}(t)$ - масштабируюшая функция с коэффициентом масштаба i и коэффициентом сдвига k; $\psi_{jk}(t)$ - вейвлет -функция с коэффициентом масштаба j и коэффициентом сдвига k; c_{ik} – коэффициенты ДВП для аппроксимации функции; d_{jk} – коэффициенты ДВП для детализации функции.

Коэффициенты c_{ik} и d_{jk} вычисляются согласно алгоритмам на этапе разложения:

$$\begin{cases} c_{j+1,k} = \sum_l \tilde{h}_{l-2k} c_{j,l} \\ d_{j+1,k} = \sum_l \tilde{g}_{l-2k} c_{j,k} \end{cases} \qquad (2)$$

и на этапе восстановления:

$$c_{j,k} = \sum_k h_{k-2l} c_{j-1,k} + \sum_k g_{k-2l} d_{j-1,k} \qquad (3)$$

Поскольку каждый из алгоритмов (2) и (3) содержит пару нерекурсивных цифровых фильтров (вейет или зеркальных)-низкочастотных с коэффициентами h и высокочастотных с коэффициентами g, соответственно, то проблема шумов квантования ДВП сводится к проблеме шумов квантования нерекурсивных цифровых фильтров. Известно [2],что дисперсия шумов квантования в нерекурсивного цифрового фильтра определяется соотношением:

$$\varepsilon^2 = (M+1) \times 2^{-2B} / 3, \qquad (4)$$

где M - число коэффициентов фильтра, B – количество бит, используемых для кодирования значений функции преобразования, коэффициентов фильтров и результатов вычислений.

Дисперсия шумов квантования для некоторых фильтров ДВП приведена в таблице 1.

Табл.1

Тип фильтра и количество коэффициентов (taps)	Хаара (HAAR) 2 taps	Дебюши (DB4) 4 taps	Дебюши (DB8) 8 taps
Количество бит B			
8	1.525e-5	2.543e-5	4.57e-5
16	2.33e-10	3.88e-10	7e-10
24	3.55e-15	5.92e-15	10.66e-15
32	5.42e-20	9.03e-20	16.26e-20

Схема разложения/восстановления ДВП для одного этапа преобразования (одного уровня масштабирования) показана на рис.1. На последующих этапах разложение/восстановления выполняется аналогично, но для выходов низкочастотных фильтров.

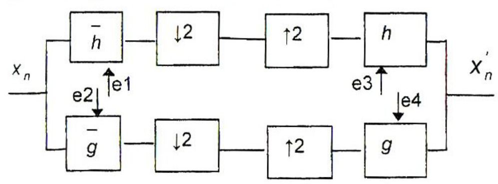

Рис.1.Схема разложения/восстановления ДВП для одного уровня масштабирования, где

$\tilde{h}, \tilde{g}$ - фильтры нижних и верхних частот разложения (analysis filters).

h, g - фильтры нижних и верхних частот восстановления (synthesis filters).

e1-e4 – независимые источники шума.

Из рисунка видно, что на каждом этапе преобразования суммарный шум квантования равен сумме шумов квантования отдельных фильтров:

$$\varepsilon_T^2 = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2 + \sum_{j=1}^{w} \varepsilon_j^2 \qquad (5)$$

где m - число низкочастотных фильтров, W - число высокочастотных фильтров.

2. Экспериментальные исследования.

Для экспериментальных исследований шумов квантования использовались функции MATLAB cuspamax, freqbrk и lelecсum,а также ступенчатая step function с ограничениями по разрядности (8,16,24 и 32 бит) для трех базисов ДВП - Хаара (HAAR) и Дебюши DB4 и DB8. Результаты исследования приведены в таблице 2. Графики зависимостей теоретической и экспериментальной дисперсий шумов квантования показаны на рис.2,а графики отношений сигнал/шум – на рис.3.

Табл. 2

Количество бит, n	HAAR NSR* db	HAAR MSE расчётная	HAAR MSE полученная	DB4 NSR db	DB4 MSE расчётная	DB4 MSE полученная	DB8 NSR db	DB8 MSE расчётная	DB8 MSE полученная
8	-57.6	6.2e-5	4.8e-6	-54	1.02e-4	1e-5	-50.88	1.83e-4	2.24e-5
16	-105.4	9.32e-10	7.9e-11	-98.4	1.55-9	3.93e-10	-96	2.8e-9	6.3e-10
24	-151.6	1.32e-14	1.9e-15	-149.3	2.37e-14	3.2e-15	-147	4.26e-14	4.5e-15
32	-202	2.17e-19	1.72e-20	-198.7	3.6e-19	3.68e-20	-195.8	6.5e-19	7.2e-20
X = freqbrk.									
8	-56.1	6.2e-5	4.92e-6	-53.1	1.02e-4	1e-5	-47	1.83e-4	2.4e-5
16	-104	9.32e-10	8e-11	-97.86	1.55-9	3.3e-10	-96	2.8e-9	5.2e-10
24	-150.5	1.32e-14	1.78e-15	-148.26	2.37e-14	3e-15	-145.26	4.26e-14	6e-15
32	-200.4	2.17e-19	1.84e-20	-197	3.6e-19	3.9e-20	-193.46	6.5e-19	9.2e-20
X = leleccum.									
8	-56.35	6.2e-5	5.36e-6	-53	1.02e-4	1.14e-5	-49.6	1.83e-4	1.92e-5
16	-104.4	9.32e-10	8.4e-11	-98.1	1.55-9	3.6e-10	-96.4	2.8e-9	5.32e-10
24	-150.88	1.32e-14	1.88e-15	-148	2.37e-14	3.1e-15	-146	4.26e-14	5.84e-15
32	-201.2	2.17e-19	1.75e-20	-198.1	3.6e-19	3.55e-20	-194	6.5e-19	4e-20
X =Step function.									
8	-79.43	6.2e-5	2.3e-8	-77	1.02e-4	3.8e-8	-72	1.83e-4	1.21e-7
16	-119.3	9.32e-10	2.32e-12	-100.3	1.55-9	1.9e-10	-100.22	2.8e-9	1.9e-10
24	-155.36	1.32e-14	5.74e-16	-155.3	2.37e-14	5.75e-16	-155	4.26e-14	6e-16
32	-222	2.17e-19	1.24e-22	-221.2	3.6e-19	1.55e-22	-217.1	6.5e-19	4e-22

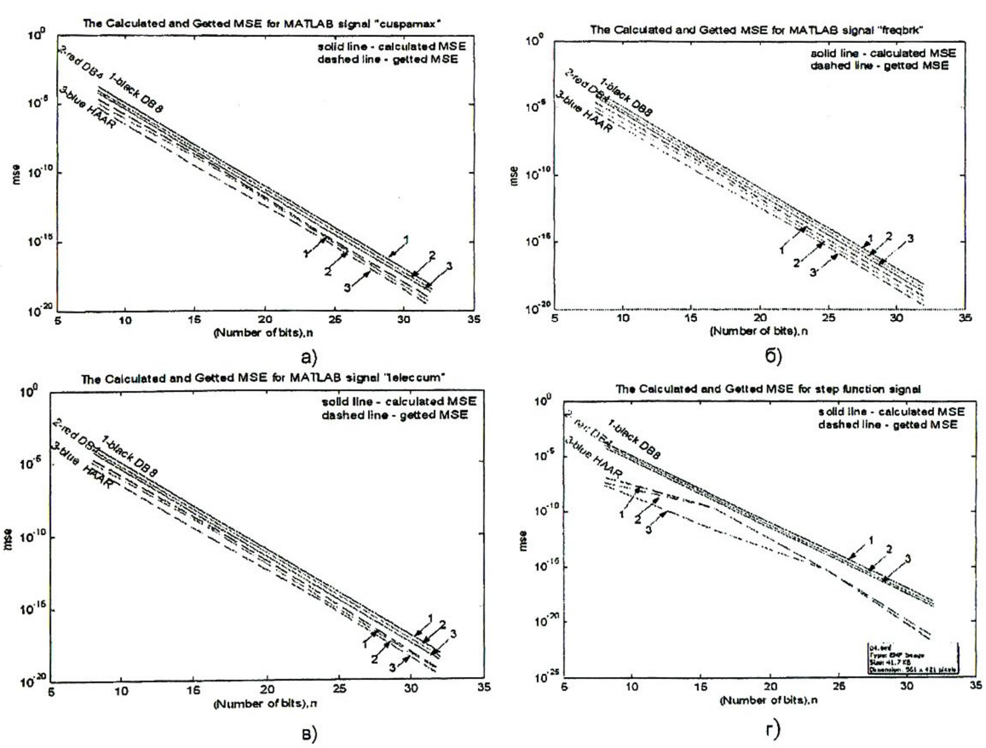

Рис.2.Графики зависимостей дисперсии шумов квантованя ДВП сигналов из табл.2,где 1-преобразование Дебюши DB-8, 2-преобразование Дебюши DB-4, 3-преобразование Хаара для функций: а) cuspamax, б) freqbrk, в) leleccum, г)step function.

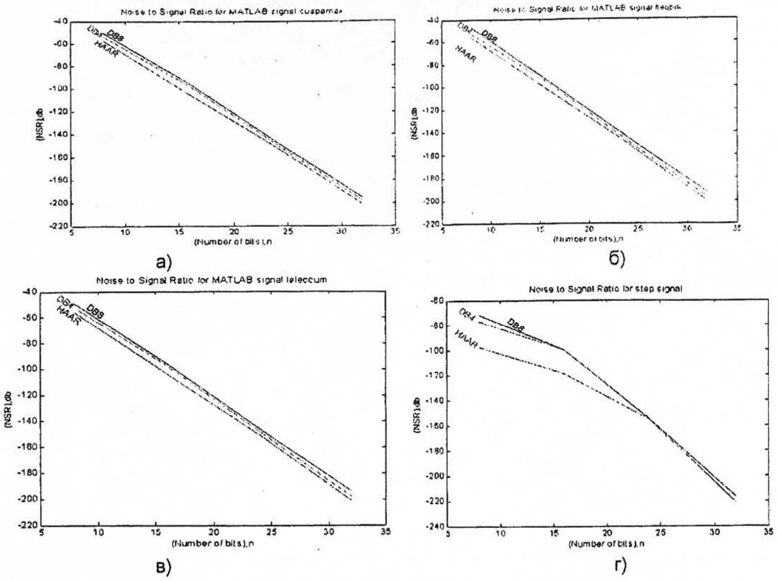

Рис.3. Графики зависимостей отношений сигнал/шум квантования ДВП для сигналов из табл.2, а) cuspamax,б) freqbrk, в) leleccum, г) step function.

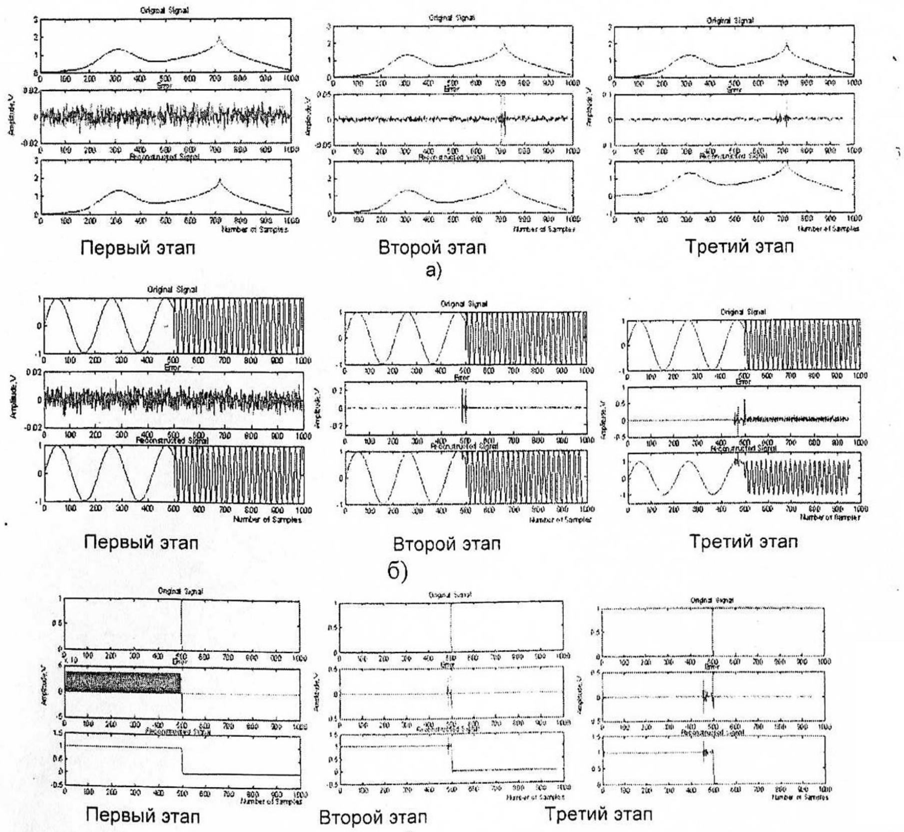

Рис.4.Результаты разложения/восстановления ДВП функций cuspamax(а), freqbrk(б) и step function(в) для трех этапов с разрядностью 8 бит.

Согласно рис. 2,3:

- реальный уровень шума квантования ДВП меньше теоретического уровня;
- изменение уровня шума квантования линейно связанно с количеством бит, что соответствует аналитическому выражению;
- чем длиннее фильтр, тем больше уровень шума, что соответствует (2).

На рис.4 представлены графики входных функций, шумов квантования и восстановленных функций ДВП для выбранных функций MATLAB,для трех этапов преобразования с количеством 8 бит.

Согласно рис. 4:

- с увеличением разрядности уровень шума уменьшается на первом этапе, а на последующих этапах уровень шума остается постоянным, что объясняется тем, что при итеративном разложении / восстановлении исчезают те составляющие, которые имеют малые значения амплитуды;
- при работе с сигналами, имеющими резкие переходы, уровень шума увеличивается, поэтому лучше работать с сигналами, имеющими плавный характер;
- итеративный процесс округления коэффициентов фильтров приводит к явлению само - квантования, т.е. большинство коэффициентов после округления обнуляются, что позволит уменьшить объем данных, и реализовать сжатие сигналов без лишних затрат.

Выводы

Использование процессоров ограниченной разрядности для реализации дискретного вейвлет-преобразования позволяет получить приемлемые результаты. Возникающие при этом шумы квантования могут быть легко оценены с тем, чтобы выбрать требуемую разрядность процессора.

Литература

1. Kaiser Gerald. A friendly guide to wavelets.: Birkhauser, 1994.
2. Пелед А, Б.Лиу Б. Цифровая обработка сигналов: Теория, проектирование, реализация: Пер. с анг.- Киев: Вища школа . 1979.-264 с..