

РОЗДІЛ 6

ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНІ СИСТЕМИ ТА ЇХ КОМПОНЕНТИ. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 519.6

Н. Б. Філімонова,
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
С. С. Забара,
доктор технічних наук, професор

АДАПТИВНІ ФІЛЬТРИ ВИДАЛЕННЯ АРТЕФАКТІВ З ЕЕГ НА ОСНОВІ ВЕЙВЛЕТ — АНАЛІЗУ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЙ КРАВЧУКА

На основі вейвлет-аналізу з використанням функцій Кравчука розроблено адаптивні фільтри видалення артефактів з ЕЕГ, які дозволяють автоматично визначити ділянки з артефактами та відділити артефакти від сигналу ЕЕГ. При цьому алгоритм виділення інваріантних ознак забезпечує адаптацію фільтрів до часової локалізації артефакту та ступеня його асиметрії.

Ключові слова: вейвлет-аналіз, функції Кравчука, адаптивний фільтр, ЕЕГ, артефакт.

Електроенцефалограма (ЕЕГ) — є важливим неінвазивним методом дослідження нейрофізіологічних механізмів мозкової діяльності. Потенціали, які реєструються зі скальпу людини, є прямим відображенням мозкової діяльності людини і містять певні ознаки як патологічних станів, так і індивідуальних особливостей сприйняття та обробки інформації. Хоча реєстрація ЕЕГ проводиться з 1924 року і Фур'є-аналіз ЕЕГ є загально визнаним методом дослідження стану головного мозку, ще є багато проблем з побічними ефектами, які виникають при записі ЕЕГ. Так, сигнал, який реєструється, є забрудненим різними артефактами, які заважають інтерпретації отриманих результатів. Найбільш відомі джерела артефактів — це шум електромережі, діяльність м'язів та рухи очей. Коректний кількісний аналіз ЕЕГ має певні обмеження, які від дослідника вимагають розпізнавання та видалення перешкод при записі сигналу. Відносно легко з ЕЕГ відповідними фільтрами видаляється шум лінії електромережі. Однак, рухи м'язів та очей призводять до появи недетермінованої складової в ЕЕГ. Як правило, дослідники в ручному режимі видаляють різні артефакти, які можуть значно викривити результати спектрального аналізу ЕЕГ. Найбільш значущим артефактом при записі ЕЕГ в префронтальних відведеннях є рухи очима та моргання. Така стандартна техніка призводить до втрати великої частини даних, бо моргання іноді відбувається до 20 разів на хвилину. Це ускладнює аналіз мозкової діяльності в префронтальній зоні, яка, за даними багатьох авторів, пов'язана з отриманням смислової інформації з пам'яті, селекцією інформації, утриманням уваги, пошуком асоціацій тощо [1]. Крім того, акт моргання є корельованим з виникненням інтересу до стимулу [2], тому важливо не просто відкинути відповідні епохи,

а мати змогу їх проаналізувати як певну реакцію на стимул. Найбільш досконалим вважається метод паралельного запису окулограми та наступне видалення її з ЕЕГ. Однак останні дослідження показали певну взаємозалежність між цими сигналами, тобто не тільки рухи очей впливають на запис сигналу ЕЕГ, а й мозкова активність присутня в записі окулограми. Тому видалення окулограми з ЕЕГ призводить до зміщення результатів аналізу та їх клінічної сумнівності [3]. Внесок м'язових артефактів найбільш спостерігається в скроневих та потиличних зонах, де взагалі їх важко реєструвати для наступного видалення з ЕЕГ. Тому останні роки активно ведеться розробка обчислювальних методів автоматичного видалення артефактів з ЕЕГ [4–7]. Так, у роботі [8] автоматично видаляються епохи, в яких сигнал перевищує $\pm 75 \mu V$, а артефакти, які залишилися, остаточно видаляються вручну. Одним із найбільш поширених методів видалення артефактів є аналіз незалежних компонент (ICA) [9–10]. Метод ICA було запропоновано як метод вирішення задачі «сліпого» розділення джерел сигналів. Метою ICA є розклад вимірюваних сигналів на статистично незалежні компоненти або джерела після відкидання компонент, які вважаються артефактами. Було доведено [11], що в результаті застосування методу ICA відбувається «витік» мозкової діяльності, тобто втрачається інформація про компоненти мозкової активності, які ніхто не збирався помічати як артефакти. Застосування методу ICA до аналізу ЕЕГ може призводити до недооцінки спектрів потужності та переоцінки узгодженості між різними ділянками мозку. Тому було запропоновано нову процедуру ідентифікації артефактів, яка полягає в комбінації методу ICA та вейвлет-аналізу [11–12]. Наш підхід є ближчим до методу виділення артефактів на основі порогової величини вейвлет-коефіцієнтів [13]. На відміну від указаних методів ми запропонували адаптивний фільтр артефактів з ЕЕГ, в якому відбувається адаптація фільтра як до місцеположення артефакту у вікні вейвлет-перетворення, так і до ступеня його асиметрії.

Запропонований метод оснований на розробленій раніше математичній моделі інваріантності розпізнавання образів зоровою системою [14–18]. У кожному вікні вейвлет-перетворення виділяється певна множина інваріантних ознак сигналу, яка забезпечує розпізнавання артефакту та його видалення з сигналу ЕЕГ. Як материнський вейвлет ми використовували функції Кравчука $\{\varphi_k^{(p)}(i, N) \}_{k=0}^{N-1}$ [19].

Алгоритм виділення інваріантних ознак сигналу складається з наступних кроків [14–16]. Розглянемо сигнал, який залежить від часу та описується за допомогою функції $y(t)$, $t \in Q$. Вважатимемо, що сигнал є дискретним, тобто $y(i)$, $i \in Q = \{0, 1, \dots, N1 - 1\}$ та квантування сигналу було проведено з кроком, який є достатньо малим, щоб зберегти всі особливості сигналу. Так, у цій роботі здійснювалась фільтрація ЕЕГ, яка була записана з частотою квантування 200 Гц. Нехай аргумент i функції $y(i)$ зазнав деякого зсуву a . Таким чином, на вхід системи поступає не сигнал $y(i)$, а перетворений сигнал с деяким фіксованим значенням зсуву $a_0 - y(i - a_0)$, який нам невідомий. Завдання полягає в тому, щоб знайти значення a_0 та виділити характерні особливості самого сигналу. Побудовано наступний алгоритм виділення системи інваріантних ознак сигналу, який складається з таких кроків [14–16]:

1. Вибір значення N — вікна обробки сигналу.

На першому кроці треба вибрати множину точок $\{0, 1, \dots, N - 1\}$, на якій буде оброблятися сигнал. Вибір значення N пов'язаний як з довжиною сигналу, так і з вибором методів, що будуть використані в подальшому. Оскільки далі буде використане швидке перетворення Фур'є (ШПФ), а алгоритми ШПФ для кількості точок, що є деяким натуральним ступенем двійки, є найбільш швидкими та простими для реалізації, обираємо n , де $N = 2^n$. Якщо сигнал є довшим за N , тобто $N < N1$, сигнал оброблюється послідовно вікном шириною N . У тому випадку, коли довжина сигналу менша за N , $N1 < N$, сигнал доповнюється нулями, або апроксимується за деяким алгоритмом. Якщо довжина сигналу менша, ніж 64 точки: $N1 < 64$, алгоритм швидкої згортки є простішим, ніж із застосуванням перетворення Фур'є. У цьому разі значення N визначається реальною довжиною сигналу. В цій роботі реалізовано вейвлет-перетворення з довжиною вікон, які є натуральними ступенями двійки.

2. Побудова множини ортонормованих систем базисних функцій Кравчука.

$$\varphi_k^{(p)}(i, N), \quad i, k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$$

Дискретизація параметра $p \in (0, 1)$ може бути й іншою, що обумовлюється потребами поставленої задачі. Для прискорення обробки сигналів у реальному часі для обраного N було побудовано функції Кравчука та їх значення було збережено у певному файлі. Крім того, було оптимізовано об'єм цього файлу, використавши властивості симетричності функцій Кравчука. Так, виходячи з рівності

$$\varphi_k^{(p)}(i, N) = (-1)^k \varphi_k^{(1-p)}(N - i, N)$$

значення функцій Кравчука при $p = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ були обчислені на основі їх значень при $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. При $p = 0.5$ функції Кравчука є симетричними відносно середини інтервалу N , що призводить до необхідності обчислення значення $\varphi_k^{(p)}(i, N)$ тільки на половині інтервалу.

3. Обчислення узагальнених спектральних коефіцієнтів сигналу.

Узагальнені спектральні коефіцієнти сигналу обчислюються для кожного $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ за формулою

$$c_k^{(p)} = y * \varphi_k^{(p)} = \sum_{i=0}^{N-1} y(i) \varphi_k^{(p)}((a - i) \bmod N, N),$$

де $a, i, k = 0, 1, \dots, N - 1$.

За теоремою про згортку

$$c_k^{(p)}(a) = y * \varphi_k^{(p)} = F^{-1} \{ F[y] F[\varphi_k^{(p)}] \}$$

де F — пряме, а F^{-1} — зворотне перетворення Фур'є. Оскільки нам наперед було відомо N (вікно вейвлет-перетворення), заздалегідь було обчислено та збережено не тільки значення функцій Кравчука, але і їх прямі перетворення Фур'є, що дозволяє проводити фільтрацію сигналів з меншими затратами часу.

4. Обчислення функціоналу енергії $W(a, p)$.

Оскільки функції Кравчука утворюють базис, тому при кожному $p \in (0, 1)$, $a \in [0, N - 1]$ справедлива рівність Парсеваля:

$$\|y\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k^{(p)}(a)|^2.$$

Тоді функціонал енергії

$$W(a, p) = \sum_{k \in M} |c_k^{(p)}(a)|^2 \quad (1)$$

у разі, коли множина M збігається з N , є константою і дорівнює квадрату нормі функції у при всіх значеннях $p \in (0, 1)$, $a \in [0, N - 1]$. Тому з'являється проблема вибору підмножини індексів, тобто номерів тих узагальнених спектральних коефіцієнтів, які містять у собі найбільш істотну інформацію про сигнал. Якщо для першої ітерації вибрати множину індексів, що неістотно відрізняється від N , важко шукати максимум на наступному кроці алгоритму. Тому на цьому кроці важливо, виходячи з евристичних міркувань, істотно обмежити множину індексів і знайти те значення $a \in [0, N - 1]$, де досягається максимум функціоналу $W(a, p)$. Якщо потім з'ясується, що цієї множини індексів недостатньо для відновлення сигналу з деякою заданою наперед похибкою, множину індексів можна доповнити, але вже при фіксованому значенні a , яке дорівнює a_0 (приховане значення зсуву), і шукати максимум функціоналу треба тільки по $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$.

У цій роботі реалізовано такий алгоритм пошуку номерів узагальнених спектральних коефіцієнтів, які формують множину M . На першому кроці множина N обмежується зверху деяким значенням $\tilde{N} < N$. Далі множину M шукають за допомогою такого ітераційного процесу: обирається деякий початковий рівень для значень

узагальнених спектральних коефіцієнтів — d і визначається множина індексів

$$M = \left\{ k : \left| c_k^{(p)}(a) \right| > d \right\} \quad (a = 0, 1, \dots, N-1; \quad k = 0, 1, \dots, \tilde{N}-1; \quad p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9).$$

Ця множина корегується виходячи з результатів відтворення сигналу з необхідною точністю.

5. Знаходження максимуму функціонала $W(a, p)$.

На цьому кроці знаходяться значення (a_0, p_0) , такі, що досягається максимум функціонала енергії

$$W(a_0, p_0) = \max_{a=0,1,\dots,N;p=0.1,0.2,\dots,0.9} W(a, p).$$

Узагальнені спектральні коефіцієнти $c_k^{(p)}$ обчислювались при різних значеннях зсуву a , тобто проводилась згортка сигналу $y(i)$ з системами базисних функцій $\varphi_k^{(p)}((a-i) \bmod N, N)$ при всіх значеннях зсуву a . При цьому максимум $W(a, p)$ досягається саме тоді, коли значення прихованого зсуву a_0 збігається з a . Це впливає з формули (1), бо $W(a, p)$ — це невід’ємний обмежений функціонал, значить, його глобальний максимум існує. Причому в нашому прикладі максимум буде досягнуто саме тоді, коли змінні значення параметру a співпадуть з прихованими значеннями a_0 . Але знайти його — це не просте завдання, тому що цей функціонал може мати багато локальних максимумів.

6. Відновлення сигналу.

На цьому кроці сигнал відновлюється за формулою

$$\tilde{y}(i) = \sum_{k \in M} c_k^{(p_0)}(a_0) \varphi_k^{(p_0)}(a_0, N), \quad (2)$$

де $\varphi_k^{(p_0)}(a_0, N) = \varphi_k^{(p_0)}((i - a_0) \bmod N < N)$.

7. Оптимізація множини спектральних коефіцієнтів.

Підмножина індексів M знаходиться в інтерактивному режимі виходячи з заданої наперед похибки відновлення сигналу ε . Похибка відновлення сигналу

$$\tilde{\varepsilon} = \|\tilde{y} - y\|,$$

де $\|\cdot\|$ квадратична норма в R^M . Можливе також застосування інших норм.

Якщо $\tilde{\varepsilon} > \varepsilon$, збільшуємо множину M : в умові, яка визначає множину $M = \left\{ k : \left| c_k^{(p)}(a) \right| > d \right\}$ зменшуємо поріг $d = d - l$, де l — деякий крок. Повертаємось до кроку (4). У разі, коли $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$, можна зменшити число узагальнених спектральних коефіцієнтів, тобто знайти мінімальну їх кількість, які забезпечать $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$. Для цього аналогічно до попереднього зменшуємо множину M , знаходимо мінімальне d , при якому $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$.

Таким чином, поміж просторів, які утворюються базисами з відповідними значеннями параметрів $a = 0, 1, \dots, N-1$ та $p \in (0, 1)$, знаходимо підпростір розмірності M , $M \leq N$, який утворюється тими функціями Кравчука, за яких сума квадратів відповідних спектральних коефіцієнтів сигналу має найбільше значення. Так ми переходимо до підпростору R^M — простору, який породжується спектральними коефіцієнтами $c_k^{(p)}$, де концентрується істотна інформація про сигнал.

На основі описаного алгоритму розроблено два фільтри видалення м’язових артефактів з ЕЕГ. Перший фільтр оснований на знаходженні ділянки ЕЕГ, яка містить деякий артефакт, та її видаленні з сигналу (або її заміні нульовим відрізком). На рис. 1.а наведено запис ЕЕГ в префронтальній зоні (відведення Fp1), який містить м’язовий артефакт, викликаний рухом очей (морганням).

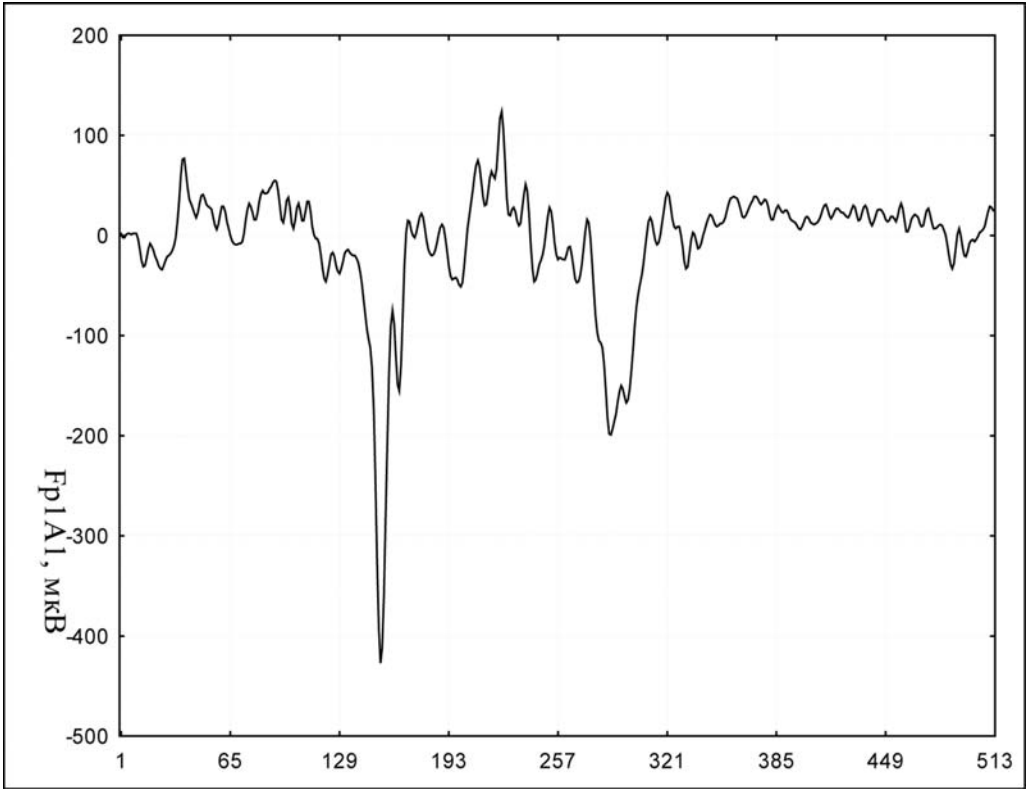


Рис. 1 – Запис ЕЕГ в префронтальній зоні з м'язовим артефактом

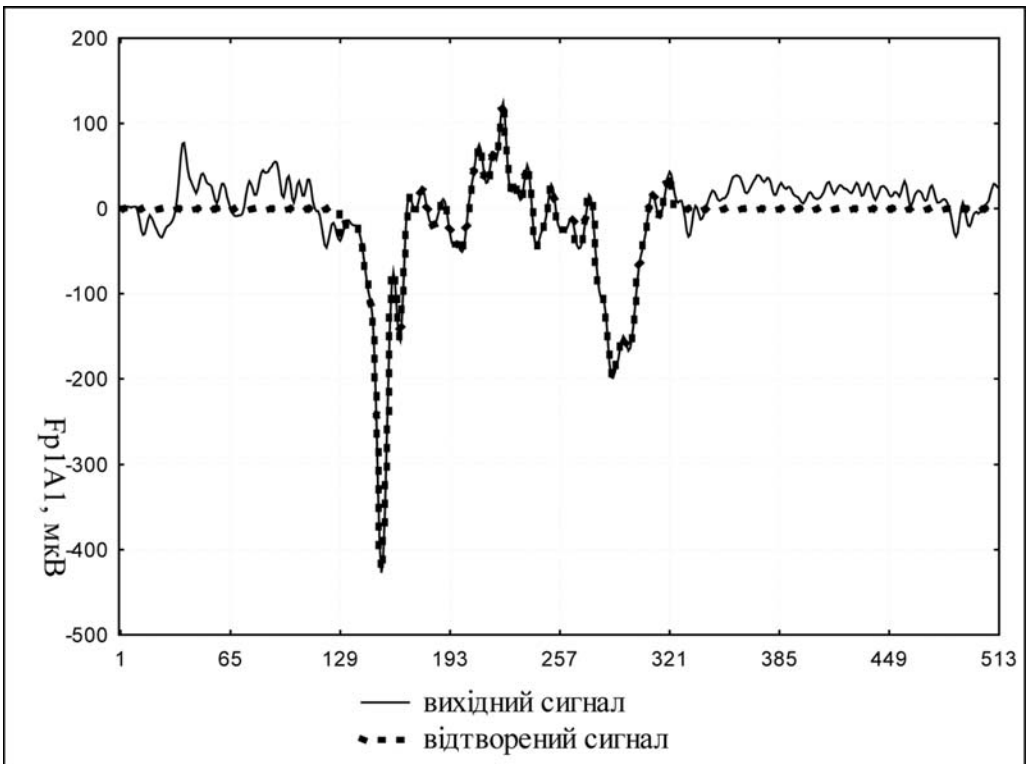
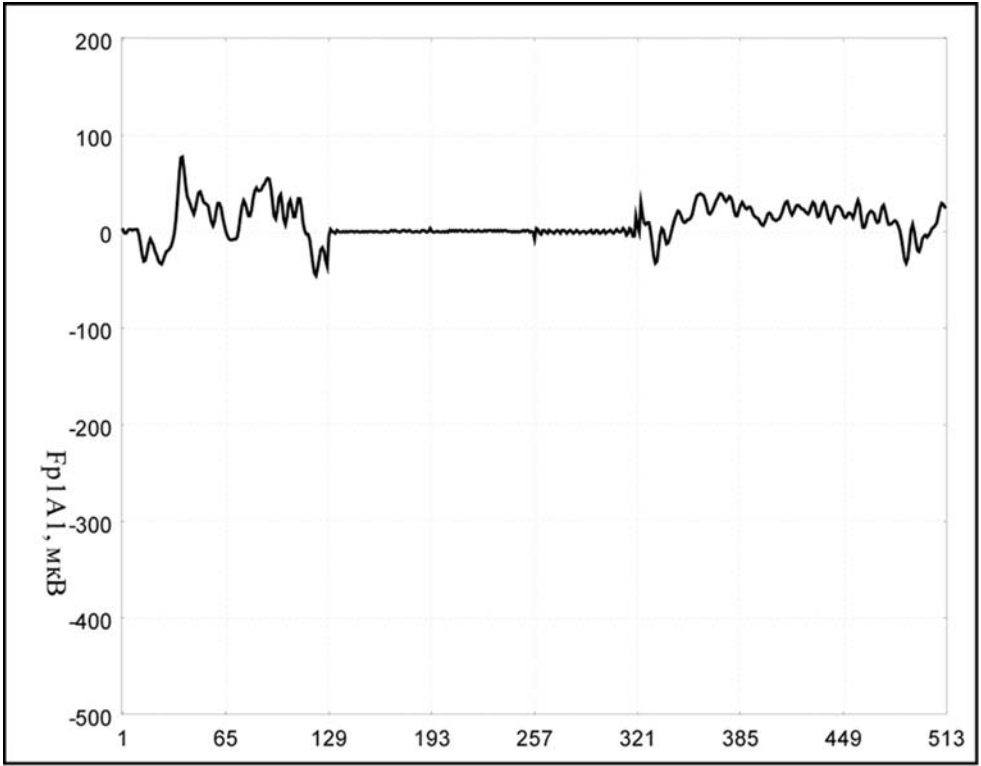


Рис. 2 – ЕЕГ з виділенням м'язовим артефактом (відтворений сигнал)

а)



б)

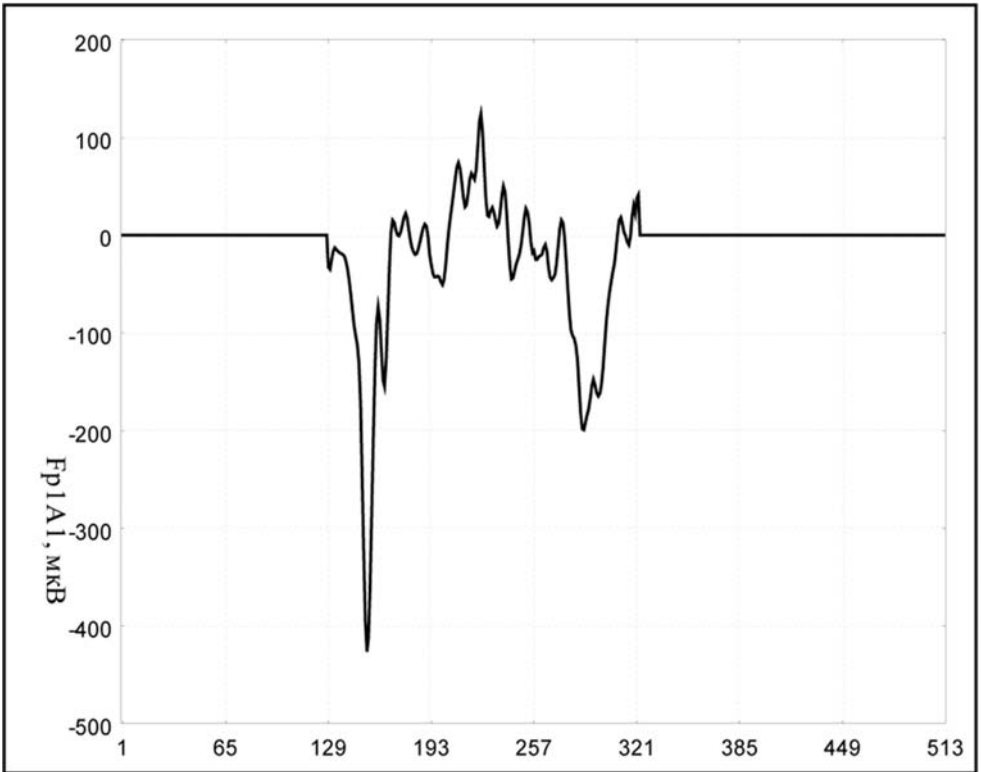


Рис. 3 — Розклад вихідної ЕЕГ на складові:
а — ЕЕГ з видаленим артефактом, б — артефакт

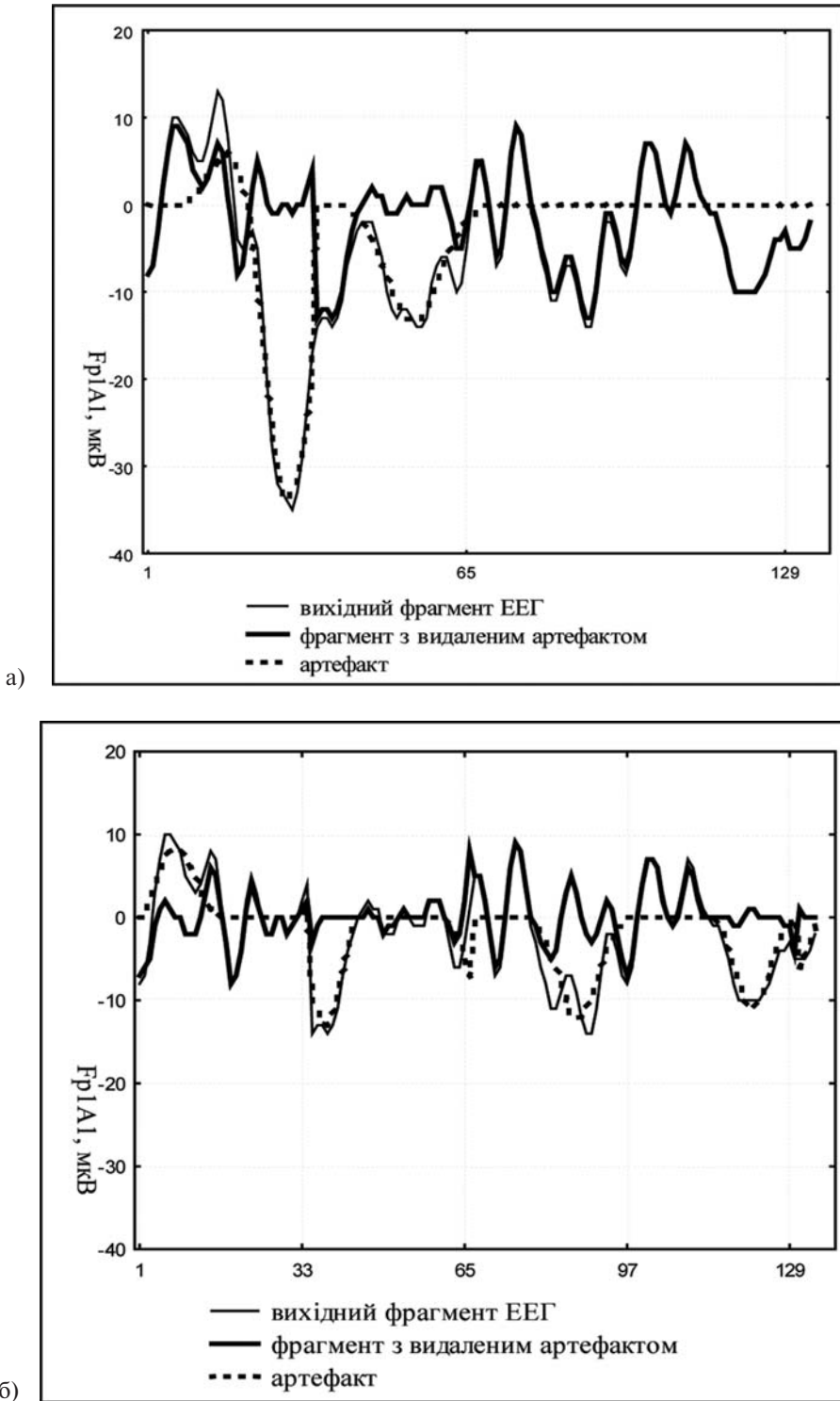


Рис. 4 — Послідовна фільтрація вихідної EEG вікнами довжиною:
 а — 64 точки, б — 32 точки

Послідовно вікном шириною в 64 точки було проаналізовано відповідні ділянки EEG. У разі перевищення першими п'ятьма узагальненими спектральними коефіцієнтами певного порогового значення проводився більш детальний аналіз цих ділянок EEG.

Відтворення сигналу на цих ділянках проводилось з використанням перших 30-ти функцій Кравчука з похибкою відновлення сигналу $\tilde{\epsilon} = 0,015$ (рис. 2). Отримані інваріантні ознаки сигналу можуть бути використані для подальшої класифікації артефактів. На рис. 3.а наведено сигнал ЕЕГ з видаленим артефактом. У тому разі, якщо подальший аналіз ЕЕГ проводиться Фур'є-аналізом, необхідно видалити знайдені ділянки з ЕЕГ, що повністю відповідає традиційному підходу до видалення артефактів з ЕЕГ в ручному режимі. Але в такому разі ми втрачаємо можливість дослідити динаміку мозкової активності та зіставити її з результатами проведення певних функціональних проб. Тому, якщо в подальшому проводиться вейвлет-аналіз ЕЕГ, подібні ділянки створюють певні «провали» у вейвлет-спектрах, що заважає інтерпретації аналізу. Зазначимо, що видалені артефакти (рис. 3.б) теж мають інформаційну цінність при аналізі функціональних проб.

Зважаючи на вказані недоліки було поставлено за мету створити фільтр видалення артефактів, який би видаляв тільки високоамплітудні складові, залишаючи низькоамплітудні високочастотні складові ЕЕГ.

Другий фільтр поєднує алгоритми вейвлет-аналізу з розробленим алгоритмом виділення інваріантних ознак сигналу. Так, фільтрація ЕЕГ відбувається послідовно вікнами шириною в 64, 32 та 16 точок. На відміну від традиційного алгоритму вейвлет-аналізу [20] ми починаємо аналіз сигналу не найменшим вікном (найбільшою частотою), а найбільшим вікном (найменшою частотою). Вищі частоти ми розглядаємо як модуляції більш низьких частот, тому знайдені артефакти в більш низькому діапазоні видаляються з сигналу, тим самим усуваючи дрейф ізолінії високочастотних складових. У кожному вікні розраховувались узагальнені спектральні коефіцієнти для перших трьох функцій Кравчука. В разі перевищення порогового рівня у відповідних ділянках ЕЕГ сигнал відтворювався з похибкою $\tilde{\epsilon} = 0,3$ (рис. 4.а–4.б) та видалявся з сигналу. При цьому алгоритм виділення інваріантних ознак забезпечив адаптацію відтвореного сигналу до часової локалізації артефакту у вікні аналізу та ступеня його асиметрії. На рис. 5 представлено фрагмент ЕЕГ з видаленими артефактами.

У кінці аналізу видалені артефакти підсумовуються та зберігаються для подальшого дослідження.

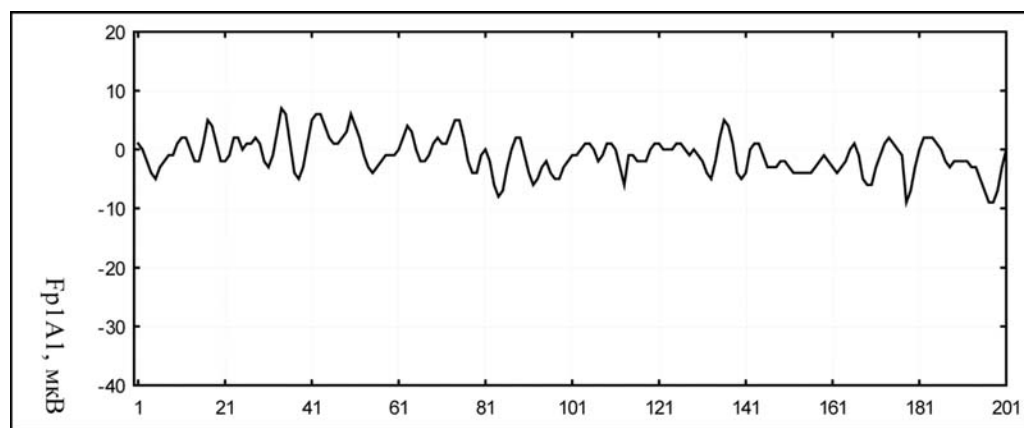


Рис. 5 — Фрагмент відфільтрованої ЕЕГ

На основі вейвлет-аналізу з використанням функцій Кравчука розроблені адаптивні фільтри видалення артефактів з ЕЕГ, які дозволяють автоматично визначати ділянки з артефактами і відокремлювати артефакти від сигналу ЕЕГ. При цьому алгоритм виділення інваріантних ознак забезпечує адаптацію фільтрів до тимчасової локалізації артефакту і ступеня його асиметрії.

Ключові слова: вейвлет-аналіз, функції Кравчука, адаптивний фільтр, ЕЕГ, артефакт.

На основе вейвлет-анализа с использованием функций Кравчука разработаны адаптивные фильтры удаления артефактов из ЭЭГ, которые позволяют автоматически определять участки с артефактами и отделять артефакты от сигнала ЭЭГ. При

ЕТОМ АЛГОРИТМ ВИДЕЛЕННЯ ІНВАРІАНТНИХ ПРИЗНАКІВ ОБЕСПЕЧУЄ АДАПТАЦІЮ ФІЛЬТРІВ К ВРЕМЕННОЇ ЛОКАЛІЗАЦІЇ АРТЕФАКТА І СТЕПЕНІ ЕГО АСИМЕТРИЇ.

Ключевые слова: вейвлет-анализ, функции Кравчука, адаптивный фильтр, ЭЭГ, артефакт.

On the basis of wavelet-analysis with use of Krawtchouk functions adaptive filters of removal of the artifacts from EEG are developed. It allow to define automatically fields with artifacts and to separate artifacts off EEG signal. Thus the algorithm for the extraction of invariant features ensures the adaptation of the filters to time localization of the artifact and to degree of its asymmetry.

Key words: wavelet-analysis, Krawtchouk functions, the adaptive filter, EEG, artifact

Література

1. Faw B. Pre-frontal executive committee for perception, working memory, attention, long-term memory, motor control, and thinking: A tutorial review // *Consciousness and Cognition*. — 2003. — V.12, Is.1. — P. 83–139.
2. Hillyard S. A. and Galambos R. Eye movement artifact in the CNV // *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*. — 1970. — V. 28, no. 2. — P. 173–182.
3. Wallstrom G. L. at al. Automatic correction of ocular artifacts in the EEG: a comparison of regression-based and component-based methods // *International Journal of Psychophysiology*. — 2004. — V. 53, no. 2. — P. 105–119.
4. Croft R. J. and Barry R. J. Removal of ocular artifact from the EEG: a review // *Neurophysiology Clinique*. — 2000. — V. 30, no. 1. — P. 5–19.
5. Phlypo R. at al. Removing Ocular Movement Artefacts by a Joint Smoothed Subspace Estimator // Hindawi Publishing Corporation. *Computational Intelligence and Neuroscience*. — 2007. — V. 7, no.3, Article ID 75079. — P.1–13.
6. De Clercq W. at al. Canonical correlation analysis applied to remove muscle artifacts from the electroencephalogram // *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. — 2006. — V. 53, no. 12, part 1. — P. 2583–2587.
7. Zikov et al. Method and system for the denoising of large-amplitude artifacts in electrograms using time-frequency transforms // United States Patent F:\Internet\Окулограмма\mph-Parser.htm — F:\Internet\Окулограмма\mph-Parser.htm — h2#h27,672,717. Assignee: Bionova Technologies Inc. (Vancouver, BC, CA). Appl. No.: 10/968,348 — March 2, 2010.
8. Busch N. A., Dubois J., VanRullen R. The Phase of Ongoing EEG Oscillations Predicts Visual Perception // *The Journal of Neuroscience*. — June 17, 2009. — V.29(24). — P.7869–7876.
9. Flexer A., Bauer H., Pripfl J., Dorffner G. Using ICA for removal of ocular artifacts in EEG recorded from blind subjects // *Neural Networks*. — September 2005. — V. 18, Is. 7. — P. 998–1005.
10. Wessel J. R., Ullsperger M. // *NeuroImage*. — February 2011. — V. 54, Is. 3. — P. 2105–2115.
11. Castellanos N. P., Makarov V. A. Recovering EEG brain signals: Artifact suppression with wavelet enhanced independent component analysis // *Journal of Neuroscience Methods*. — December 2006. — V. 158, Is. 2. — P. 300–312.
12. Ghandeharion H., Erfanian A. A fully automatic ocular artifact suppression from EEG data using higher order statistics: Improved performance by wavelet analysis // *Medical Engineering & Physics*. — September 2010. — V. 32, Is. 7. — P. 720–729.
13. Krishnaveni V. et al. Removal of ocular artifacts from EEG using adaptive thresholding of wavelet coefficients // *J. Neural Eng.* — 2006. — V. 3. — P. 338.
14. Vainerman L., Filimonova N. Hyperspectral imagery with the application of Krawtchouk polynomials // *Algorithms for Multispectral and Hyperspectral Imagery*. A.Evan Iverson, Editor, Proc. SPIE. — 1994. — V. 2231. — P. 148–155.
15. Vainerman L. I. and Filimonova N. B. Signal processing and polynomials of discrete argument // *Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications*. — Berlin: Akademie Verlag, 1994, Vol.II. — P.889–890.
16. Филимонова Н. Б. Общая схема выделения полной системы признаков сигнала, инвариантной ко всем его линейным преобразованиям // *Компьютерные технологии и управление в биологии и медицине: Сб. науч. тр.* — Киев, ИК АН Украины. — 1996. — С. 66–74.
17. Філімонова Н. Б., Макаруч М. Ю. Математична модель інваріантності розпізнавання образів в зоровій системі // *Фізика живого*. — 2005. — Т. 13, № 2. — С. 83–92.
18. Забара С. С., Філімонова Н. Б., Зеленський К. Х. Метод виділення інваріантних ознак сигналів // *Доповіді Національної академії наук України*. — 2009. — № 3. — С. 55–59.
19. Забара С. С., Філімонова Н. Б. Вейвлет-перетворення з використанням функцій Кравчука // *Вісник університету України. Серія «Інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика»*. — 2010. — № 8. — С. 6–13.
20. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. — М.: Техносфера, 2006. — 272 с.