

## МАТРИЧНИЙ АЛГОРИТМ СКОРОЧЕННЯ РОЗМІРНОСТІ СХЕМОТЕХНІЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕМС

*Досліджено матричний алгоритм скорочення розмірності схемотехнічних моделей МЕМС. Відмічено його переваги та недоліки. Розроблено модифікацію алгоритму, яка полягає у використанні універсальної макромоделі механічних складових МЕМС, що вирізняється топологією та кількістю двополюсних компонентів, забезпечує підвищену точність моделювання на конкретних частотах, дає можливість керувати точністю кінцевого результату.*

**Ключові слова:** матричний алгоритм, МЕМС, макромоделі.

У зв'язку з поширеним використанням мікроелектромеханічних систем (МЕМС) актуальною є проблема моделювання складних систем з блоками різної фізичної природи у єдиному базисі змінних. Найбільш розповсюдженим на сьогодні є використання еквівалентних схемотехнічних моделей. Однак більшість неелектронних вузлів з метою збереження необхідної точності потребують використання моделей, розрахунок яких проводиться за допомогою методу кінцевих елементів або методу кінцевих різниць. Внаслідок цього еквівалентні схемотехнічні моделі можуть включати в себе до кількох сотень тисяч компонентів, що робить практично неможливим використання відомих пакетів схемотехнічного проектування [1]. Єдиним виходом з такого становища є побудова схемотехнічних макромоделей, які мають суттєво менший розмір (максимум кілька десятків елементів), але дозволяють моделювати такі об'єкти з прийнятною похибкою. Одним із таких підходів [2] є матричний алгоритм скорочення розмірності схемотехнічних моделей МЕМС.

### Матричний алгоритм

Метою матричного алгоритму скорочення [3] є побудова макромоделі схеми у вигляді чотириполюсника (у загальному випадку N-полюсника) у формі:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} \\ Y_{ba} & Y_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де  $I_a$ ,  $U_a$  — струм і напруга на вході макромоделі,  $I_b$ ,  $U_b$  — струм і напруга на виході макромоделі. Пропонується отримувати рівняння (1) безпосередньо за загальною матрицею схеми (наприклад матриці провідності  $Y$ ) відповідно до виразу:

$$Y_{ip}(j) = \frac{1}{\Delta_{aa,bb}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{bb} - \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & \Delta_{aa} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де  $\Delta_{ij}$  — алгебраїчне доповнення елемента  $i, j$  початкової матриці, рівне визначнику матриці, отриманої з матриці схеми  $Y$  після викреслювання рядка  $i$  та стовпця  $j$ , на перетині яких знаходився цей елемент, при цьому його знак визначається множителем  $-1^{i+j}$ ;  $\Delta_{aa,bb}$  — подвійне алгебраїчне доповнення, що дорівнює визначнику матриці, одержаної викреслюванням рядків та стовпців з номерами  $a$  і  $b$ , при цьому його знак визначається множителем  $-1^{2(a+b)}$ .

Необхідні алгебраїчні доповнення можна не обчислювати окремо, а отримати їх за допомогою процедури обернення початкової матриці, елементи якої визначені на вибраній частоті  $\omega_0$ , що фіксується:

$$Y^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix},$$

де  $\Delta$  — визначник початкової матриці  $Y$ .

При цьому

$$\Delta_{aa,bb} = \frac{\Delta_{bb}\Delta_{aa} - \Delta_{ba}\Delta_{ab}}{\Delta} \quad (3)$$

Таким чином, якщо знайдені чисельні значення елементів оберненої матриці схеми  $Y^{-1}$ :

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

то легко можна знайти макромодель схеми у вигляді чотиріполюсника (1). Для цього, у разі чотиріполюсника з портами  $a$  і  $b$ , необхідно вибрати чотири елементи оберненої матриці (4)  $g_{aa}, g_{bb}, g_{ab}, g_{ba}$  і підрахувати значення:

$$g_{aa,bb} = g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba}$$

Параметри скороченої моделі знаходяться із співвідношень:

$$\begin{aligned} Y_{aa} &= g_{bb} / g_{aa,bb}; \\ Y_{ab} &= -Y_{ba} = g_{ba} / g_{aa,bb}; \\ Y_{bb} &= g_{aa} / g_{aa,bb}. \end{aligned}$$

Оскільки знайдені параметри є комплексними величинами, зручно рівняння макромоделі схеми представити у вигляді суми дійсної і уявної складових:

$$Y_{tp} = \begin{bmatrix} Y_{aa0} & Y_{ab0} \\ Y_{ba0} & Y_{bb0} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} Y_{aai} & Y_{abi} \\ Y_{bai} & Y_{bbi} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

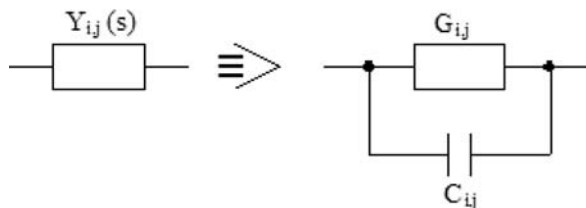
Зберігається також можливість параметри макромоделі записати у формі дрібно-раціональних передавальних функцій від комплексної частоти. Для цього необхідно повернутися до виразів (2) і (3), додатково до знаходження елементів оберненої матриці схеми  $g_{ij}$  обчислити її визначник  $\Delta$  і необхідні алгебраїчні доповнення  $\Delta_{ij} = g_{ij} \cdot \Delta$ .

Обчислення виразу (5) на різних частотах  $\omega$  підтверджує, що для лінійних схем, принаймні, для частот  $\omega \leq \omega_0$ , де  $\omega_0$  — частота, на якій спочатку визначені елементи оберненої матриці (4), дійсні частини обчислених параметрів (5) практично зберігають свої значення, а уявні частини змінюються пропорційно обраній частоті. Це підтверджує принципову можливість застосування параметрів схемотехнічної макромоделі, обчисленої на одній частоті, в широкому частотному діапазоні.

Але макромодель у вигляді рівнянь (5) незручна для вбудовування в пакети схемотехнічного проектування. Оскільки параметри макромоделі визначаються сумою дійсної і уявної частин:

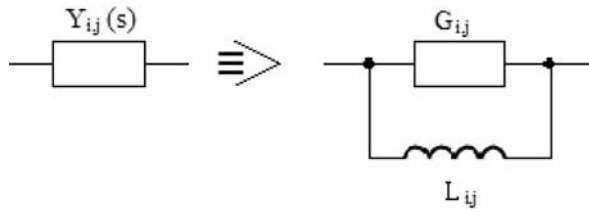
$$Y_{ij} = a_0 + ia_1, \quad (6)$$

то у випадку  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$  відповідний компонент схемотехнічної макромоделі може бути представлений у вигляді паралельного з'єднання провідності  $G_{ij} = Re(Y_{ij})$  і ємності  $C_{ij} = Im(Y_{ij}) / \omega_0$  (рис. 1).



**Рис. 1 — Схемотехнічна інтерпретація комплексного параметра чотиріполюсника у випадку  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$**

У випадку  $a_0 > 0, a_1 > 0$  відповідний компонент схемотехнічної макромоделі може бути представлений у вигляді паралельного з'єднання провідності  $G_{ij} = \text{Re}(Y_{ij})$  і індуктивності  $L_{ij} = 1 / (\text{Im}(Y_{ij})\omega_0)$  (рис.2).



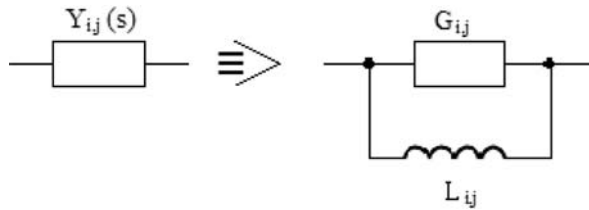
**Рис. 2 — Схемотехнічна інтерпретація комплексного параметра чотириполюсника у випадку  $a_0 > 0, a_1 > 0$**

Власна провідність вузла схемотехнічної макромоделі  $Y_i(i)$  визначається сумою всіх елементів  $i$ -го рядка матриці рівнянь (5). Дійсна частина  $Y_{ij}(i)$  або  $Y_i(i)$  для стійких пасивних макромоделей повинна бути обов'язково позитивною, а уявна частина може бути й негативною.

### Універсальна макромодель неелектричних складових MEMC

Схемотехнічна інтерпретація комплексних параметрів чотириполюсника передбачає залежність типу реактивного елемента в кінцевій макромоделі від знаку  $a_1$  в (6). Це означає, що навіть для однієї і тієї ж початкової схеми при використанні матричного алгоритму на різних частотах отримані макромоделі можуть відрізнятися за структурою, що призводить до ускладнення їх використання.

Для усунення цієї проблеми було запропоновано використовувати при інтерпретації (6) незалежно від знаку  $a_1$  універсальну макромодель у вигляді схеми, зображеної на рис. 3.



**Рис. 3 — Схемотехнічна інтерпретація комплексного параметра чотириполюсника універсальної макромоделі**

Номінали елементів при  $a_0 > 0, a_1 > 0$  обчислюються як:

$$G_{ij} = \text{Re}(Y_{ij}), C_{ij} = k \text{Im}(Y_{ij}) / \omega_0, L_{ij} = 1 / ((k - 1) \text{Im}(Y_{ij})\omega_0),$$

а при  $a_0 > 0, a_1 < 0$ :

$$G_{ij} = \text{Re}(Y_{ij}), C_{ij} = (k - 1) \text{Im}(Y_{ij}) / \omega_0, L_{ij} = 1 / (k \text{Im}(Y_{ij})\omega_0),$$

де  $k$  — коефіцієнт, що задає співвідношення між номіналами реактивних елементів. Оскільки кількість реактивних елементів у схемі універсальної макромоделі збільшилась, збільшився максимальний степінь коефіцієнта передачі, що призводить до зростання точності моделювання.

### Тестовий приклад

Порівняємо ефективність базової та розробленої універсальної макромоделі. Основним критерієм порівняння ефективності макромоделей є відносна похибка результату. Похибка визначається як відхилення значень власних частот (мод) отриманої макромоделі від справжніх значень.

Як тестовий приклад використаємо еквівалентні схеми заміщення для моделі закріпленої неоднорідної балки з трьома ступенями свободи [4]. Скорочення відбувалося декілька разів, заданими частотами використовувалися справжні значення власних частот нескороченої схеми (стовпчик «Початкове коло» табл. 1), в результа-

ті чого отримано декілька макромоделей, кожна з яких моделює одну моду (стовпчик «Базова макро модель» табл. 1).

А тепер проведемо скорочення для кожної моди за допомогою розглянутої модифікації базового матричного алгоритму при різних значеннях коефіцієнта  $k$  універсальної макромоделі та проведемо дослідження впливу цього коефіцієнта на точність результатів моделювання. Результати моделювання наведено у стовпчиках «Універсальна макро модель» табл. 1.

Як видно з результатів моделювання отриманих макромоделей, зменшення коефіцієнта  $k$  призводить до зменшення відносної похибки. Таким чином, експериментально показано, що у разі застосування матричного алгоритму розроблена універсальна макро модель забезпечує більш високу точність у порівнянні з базовою.

**Висновки.** Розглянутий матричний алгоритм скорочення має такі переваги:

- можливість створення кінцевої макромоделі, структура якої не залежить від структури початкової схеми;
  - високу точність отриманої в результаті макромоделі на заданій частоті.
- Основними недоліками використання цього алгоритму є:
- процедура скорочення є досить складною і потребує великої кількості обчислень, що накладає обмеження на розміри початкової схеми;
  - точність макромоделі залежить від способу схемотехнічної інтерпретації комплексних параметрів чотиріполюсника;
  - отримана макро модель доволі точно моделює поведінку вихідного об'єкта у відносно вузькому діапазоні частот.

Таблиця 1. — Результати моделювання схем заміщення закріпленої неоднорідної балки з трьома ступенями свободи

Показник	Початкове коло	Базова макро модель	Універсальна макро модель				
			3	2	1,5	1,11	1,05
Коефіцієнт $k$	–	–	3	2	1,5	1,11	1,05
1-а мода, Гц	13,988	13,988	13,988	13,988	13,988	13,988	13,988
2-а мода, Гц	91,794	91,794	91,794	91,794	91,794	91,794	91,794
3-а мода, Гц	176,29	200,38	187,90	187,90	180,84	177,48	176,87
4-а мода, Гц	477,44	429,14	452,71	452,71	467,40	474,77	476,14
5-а мода, Гц	495,51	495,53	495,52	495,52	495,51	495,51	495,51
6-а мода, Гц	861,82	861,83	861,82	861,82	861,82	861,82	861,81
Максимальна похибка, %	–	13,67	7,08	4,34	2,58	0,68	0,33

Беручи до уваги недоліки дослідженого матричного алгоритму скорочення розмірності схемотехнічних моделей МЕМС, розроблено універсальну макро модель механічних складових МЕМС, яка має іншу топологію та кількість двополюсних компонентів, забезпечує підвищену точність моделювання на конкретних частотах, дає можливість керувати точністю кінцевого результату. Експериментально, на базі розрахунків тестових прикладів, доведено ефективність розробленої універсальної макромоделі механічних складових МЕМС. Наведені результати свідчать, що у разі її використання значно зростає точність у порівнянні з базовою макро моделлю.

*Исследован матричный алгоритм сокращения размерности схемотехнических моделей МЭМС. Отмечены его преимущества и недостатки. Разработана модификация алгоритма, заключающаяся в использовании универсальной макро модели механических составляющих МЭМС, которая отличается топологией и количеством двухполюсных компонентов, обеспечивает повышенную точность моделирования на конкретных частотах, дает возможность управлять точностью конечного результата.*

**Ключевые слова:** матричный алгоритм, МЭМС, макро модель.

*In the paper the matrix algorithm for reduction of MEMS circuit models dimension is investigated. Its advantages and disadvantages are indicated. The algorithm modification is developed that consists in the usage of a universal macromodel of MEMS mechanical parts which differs by the topology and a number of two-terminal components, provides an enhanced simulation accuracy at the particular frequencies, gives the possibility to control a final result accuracy.*

**Key words:** matrix algorithm, MEMS, macromodel.

### Література

1. Ладогубец В. В. Состояние и перспективы развития автоматизированного схемотехнического проектирования / В. В. Ладогубец // Электроника и связь : тематический выпуск «Проблемы электроники». — 2005. — Ч. 1. — С. 121–127.
2. Ладогубец В. В. Методы макромоделирования МЭМС / В. В. Ладогубец, А. Ю. Безносик, А. В. Крамар, А. Д. Финогенов // Электроника и связь : тематический выпуск «Проблемы электроники». — 2008. — Ч. 1. — С. 244–248.
3. Петренко А. И. Алгоритм сокращения размерности моделей RLC-схем / А. И. Петренко, И. А. Петренко // Электроника и связь. — 2004. — № 23. — С. 49–56.
4. Петренко А. І. Використання пакетів схемотехнічного проектування для побудови моделей механічних компонентів / А. І. Петренко, В. В. Ладогубець, О. Ю. Безносик [та ін.] // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. — 2009. — № 638. — С. 18–22.